



UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Civil

**“DESARROLLO DEL PROGRAMA DE ANÁLISIS LINEAL Y NO
LINEAL DE ESTRUCTURAS EN DOS DIMENSIONES POR EL
MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS”**

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Ingeniero Civil

Autores:

Carlos Mauricio Calderón Bernal

CI: 0106654551

Correo electrónico: cmcalderonbernal@gmail.com

Luis Alfonso Morocho Guamán

CI: 0106448921

Correo electrónico: luis.mrochop@gmail.com

Director:

Ing. Francisco Xavier Flores Solano, PhD

CI: 0301547410

Cuenca - Ecuador

23 de Junio de 2020



RESUMEN

El análisis estructural evolucionó rápidamente desde la invención de las computadoras, con el pasar del tiempo se desarrollaron programas comerciales muy eficientes, pero de código cerrado. Esto limita a que el usuario desconozca el proceso de solución e interprete erróneamente los resultados. En el presente trabajo de titulación se propone el desarrollo de un programa implementado en MATLAB, capaz de realizar el análisis estático lineal y no-lineal de estructuras tipo pórticos y armaduras en dos dimensiones. Esta herramienta académica computacional está orientada a los estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad de Cuenca, mediante la cual los estudiantes podrán analizar, comparar y validar sus cálculos. Conjuntamente, se desarrolla el manual de usuario para el manejo correcto y eficiente del programa. El proyecto se fundamenta en el método de los desplazamientos, ya que este método requiere una solución directa de ecuaciones algebraicas simultáneas, las mismas que pueden ser fácilmente resueltas y convenientemente programadas en el ordenador. Finalmente, el proyecto demuestra la veracidad y sencillez de la implementación del método de los desplazamientos, y se espera que este sea la base para el desarrollo de futuras versiones de un programa completo y propio de la Universidad de Cuenca.

Palabras Claves: Análisis Lineal, Análisis No-Lineal, Método de los Desplazamientos, Pórticos, Armaduras, MATLAB.



ABSTRACT

Structural analysis evolved rapidly with the advent of the computer, with very efficient, but closed source commercial software developed over time. This limits the user in that he or she ignores the solution process and may misinterpret the results. The present graduation thesis posits the development of a program implemented in MATLAB, capable of performing two-dimensional linear and non-linear static analysis of frame and truss structures. This computational academic tool is targeted at Civil Engineering students of the University of Cuenca, whereby students will be able to analyze, compare, and validate their calculations. Additionally, a user manual is developed for the proper and efficient use of the program. The project is based on the displacement method of analysis, as this method requires a solution derived directly from a set of simultaneous algebraic equations, the same which can be easily resolved and conveniently programmed on a computer. Finally, the project demonstrates the veracity and simplicity of implementing the displacement method of analysis, and it is hoped that this will be the basis for the development of future versions of a comprehensive and proprietary program of the University of Cuenca.

Key Words: Linear Analysis, Non-Linear Analysis, Displacement Method, Frames, Trusses, MATLAB.



ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN	15
1.1.	Antecedentes	15
1.2.	Justificación del Proyecto	15
1.3.	Objetivos	16
1.3.1.	Objetivo General	16
1.3.2.	Objetivos Específicos	16
1.4.	Alcance	16
1.5.	Organización del trabajo de investigación	16
2.	MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE	18
2.1.	Linealidad versus No-Linealidad	18
2.1.1.	Principios Fundamentales	19
2.1.2.	Diagrama Esfuerzo-Deformación	19
2.1.3.	Ley de Hooke	22
2.2.	Análisis Matricial	22
2.2.1.	Historia del Análisis Matricial	22
2.2.2.	Métodos Matriciales versus Métodos Clásicos	23
2.2.3.	Métodos Matriciales versus Método de los Elementos Finitos	24
2.2.4.	Método de las Fuerzas y Método de los Desplazamientos	24
2.2.5.	Grados de Libertad (GDL)	24
2.2.6.	Indeterminación Cinemática y Estática	25
2.2.7.	Modelo Analítico	27
2.3.	Programas de Análisis Estructural	28
2.3.1.	STRESS	28
2.3.2.	SAP 2000	28
2.3.3.	ETABS	29
2.3.4.	OpenSees	29
2.3.5.	CYPECAD	29
2.4.	MATLAB	29
3.	MATERIALES Y MÉTODOS	30
3.1.	Barra Unidimensional (1D)	30
3.1.1.	Rigidez	30
3.1.2.	Matriz de Rigidez Elemental	31
3.1.3.	Combinación de Rigidez de Elementos	33
3.1.4.	Método Partición de la Matriz de Rigidez	36
3.1.5.	Desplazamientos Iniciales en Apoyos	37
3.1.6.	Fuerzas No-Nodales	37
3.1.7.	Fuerzas de Empotramiento Perfecto	37
3.1.8.	Cambios de Temperatura	40
3.1.9.	Errores de Fabricación	41
3.2.	Armaduras en 2D	42
3.2.1.	Matriz de Rigidez Elemental	42



3.2.2.	Transformación de Coordenadas.....	43
3.2.3.	Efectos en Armaduras en 2D.....	46
3.2.4.	Proceso para Análisis Lineal de Armaduras en 2D	47
3.2.5.	Proceso para Análisis No-Lineal en Armaduras en 2D.....	48
3.3.	Vigas en 2D	50
3.3.1.	Matriz de Rigidez Elemental.....	51
3.3.2.	Cargas No-Nodales	55
3.3.3.	Relación Fuerza-Desplazamiento de un Elemento Viga con una Articulación en un Extremo del Elemento.....	56
3.4.	Pórticos en 2D.....	58
3.4.1.	Matriz de Rigidez Elemental.....	58
3.4.2.	Sistema de Coordenadas.....	59
3.4.3.	Cargas No-Nodales	61
3.4.4.	Efectos de temperatura	61
3.5.	Temas especiales.....	62
3.5.1.	Condensación estática	62
3.5.2.	Aplicación de Restricciones (Constraints)	63
3.5.3.	Deformación por Corte.....	65
3.5.4.	Conexión por Desfase	68
3.6.	Proceso para Análisis Lineal Generalizado.....	71
3.7.	Proceso para Análisis No-Lineal en Pórticos en 2D	72
3.7.1.	Método de Carga Unitaria por Eventos.....	72
3.8.	Algoritmos para Implementación en Computadora	74
3.8.1.	Algoritmo de Análisis Lineal Generalizado	74
3.8.2.	Algoritmo de Análisis No-Lineal de Armaduras en 2D	75
3.8.3.	Algoritmo de Análisis No-Lineal de Pórticos en 2D.....	76
4.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	77
4.1.	Ejemplos Académicos de Armaduras en 2D.....	77
4.1.1.	Ejemplo A1: Armaduras en 2D Análisis Lineal.....	77
4.1.2.	Ejemplo A2: Armaduras en 2D Análisis No-Lineal.....	82
4.2.	Ejemplos Académicos de Pórticos en 2D	87
4.2.1.	Ejemplo P1: Pórticos en 2D Análisis Lineal	87
4.2.2.	Ejemplo P2: Pórticos en 2D Análisis No-Lineal.....	93
5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	100
6.	BIBLIOGRAFÍA	102
7.	ANEXOS	104
7.1.	Anexo 1: Tablas de Empotramiento Perfecto (Kassimali, 2012).....	104
7.2.	Anexo 2: Matriz de Rigidez General Ejemplo A1	105
7.3.	Anexo 3: Matriz de Rigidez General Ejemplo A2	106
7.4.	Anexo 4: Matriz de Rigidez General Ejemplo P1	107
7.5.	Anexo 5: Programa y Manual de Usuario.....	107



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Diagrama Esfuerzo-Deformación del acero (Hibbeler, 2011).	20
Figura 2: Curva Elasto-Plástica: a) Esfuerzo-Deformación, b) Momento-Curvatura.....	21
Figura 3: Viga articulada y doblemente apoyada (Flores, 2018).....	25
Figura 4: Diagrama de GDL de la estructura 1 (Flores, 2018).	25
Figura 5: Viga doblemente empotrada y apoyada (Flores, 2018).....	26
Figura 6: Diagrama de GDL de la estructura 2 (Flores, 2018).	26
Figura 7: Viga articulada y doblemente apoyada (Flores, 2018).....	26
Figura 8: Diagrama de cuerpo libre de la estructura 1 (Flores, 2018).	27
Figura 9: Viga doblemente empotrada y apoyada (Flores, 2018).....	27
Figura 10: Diagrama de cuerpo libre de la estructura 2 (Flores, 2018).	27
Figura 11: (a) Estructura, (b) Modelo Analítico.	28
Figura 12: Barra en 1D.	30
Figura 13: (a) Barra en 1D, (b) Caso 1, (c) Caso 2.....	31
Figura 14: Diagrama de Cuerpo Libre de Estructura conformada por Elementos tipo Barra en 1D.	33
Figura 15: Estructura Barra en 1D Empotrada.	33
Figura 16: Fuerza No-Nodales en elemento.	38
Figura 17: (a) Elemento original, (b) Estado 1, (c) Estado 2.....	38
Figura 18: Barra en 1D doblemente empotrada con carga axial distribuida.....	39
Figura 19: Diagrama de cuerpo libre barra en 1D con carga uniforme axial.....	39
Figura 20: Corte en elemento.	39
Figura 21: Error de fabricación en un elemento (McGuire et al., 2014).....	41
Figura 22: Elemento Armadura en 2D.....	42
Figura 23: Sistema de Coordenadas.	43
Figura 24: Sistema de Coordenadas Locales.	43
Figura 25: Sistema de Coordenadas Globales	44
Figura 26: Transformación de Fuerzas.	44
Figura 27: GDL de un elemento viga.	50
Figura 28: Posición inicial y deformada de un elemento viga (Kassimali, 2012).	51
Figura 29: Desplazamiento unitario en el GDL u_1	52
Figura 30: Desplazamiento unitario en el GDL u_2	53
Figura 31: Desplazamiento unitario en el GDL u_3	54
Figura 32: Desplazamiento unitario en el GDL u_4	54
Figura 33: Fuerzas de empotramiento para una viga cargada uniformemente.	55
Figura 34: Elemento viga con articulación en el extremo izquierdo.	57
Figura 35: Elemento viga con articulación en el extremo derecho.....	58
Figura 36: GDL de un elemento pórtico.....	59
Figura 37: Relación entre desplazamientos en coordenadas globales con desplazamientos en coordenadas locales.....	60
Figura 38: Variación de temperatura en función de su peralte (Sennett, 1994).....	61
Figura 39: Condensación estática para determinar la rigidez lateral de la estructura.	63
Figura 40: Ejemplos de aplicación de restricciones, a) Eliminar deformación axial, b) Conectar dos elementos.....	64
Figura 41: Esfuerzo cortante en un elemento diferencial (Kassimali, 2012).....	65



Figura 42: Conexiones por desfase: a) Estructura, b) Modelo analítico sin considerar las dimensiones de las conexiones, c) Modelo analítico al considerar las dimensiones de las conexiones (Kassimali, 2012).	69
Figura 43: Segmentación de un elemento debido a conexiones por desfase.	69
Figura 44: Conexiones por desfase, a) conexión rígida d_b , b) conexión rígida d_e .	70
Figura 45: Ejemplo Armadura en 2D Análisis Lineal.	78
Figura 46: Desplazamientos Ejemplo A1 (UCAS2D).	80
Figura 47: Desplazamientos Ejemplo A1 (Computers and Structures, Inc., 2017).	80
Figura 48: Reacciones en apoyos Ejemplo A1 (UCAS2D).	81
Figura 49: Reacciones Ejemplo A1 (Computers and Structures, Inc., 2017).	81
Figura 50: Esfuerzos Axiales Ejemplo A1 (UCAS2D).	82
Figura 51: Esfuerzos Ejemplo A1 (Computers and Structures, Inc., 2017).	82
Figura 52: Ejemplo Armadura en 2D Análisis No-Lineal.	84
Figura 53: Modelo Ejemplo A2 (UCAS2D).	85
Figura 54: Curva Pushover Ejemplo A2 (UCAS2D).	86
Figura 55: Comparación de los resultados obtenidos con OpenSees y UCAS2D.	86
Figura 56: Ejemplo de un análisis lineal de un pórtico en 2D.	87
Figura 57: Deformada de la Estructura Ejemplo P1, a) UCAS2D, b) SAP2000 (Computers and Structures, Inc., 2017).	90
Figura 58: Gráfico de fuerza axial Ejemplo P1 (UCAS2D).	91
Figura 59: Gráfico de fuerza axial Ejemplo P1 (Computers and Structures, Inc., 2017).	91
Figura 60: Gráfico de fuerza cortante Ejemplo P1 (UCAS2D).	92
Figura 61: Gráfico de fuerza cortante Ejemplo P1 (Computers and Structures, Inc., 2017).	92
Figura 62: Gráfico de momento flector Ejemplo P1 (UCAS2D).	92
Figura 63: Gráfico de momento flector Ejemplo P1 (Computers and Structures, Inc., 2017).	93
Figura 64: Ejemplo de un análisis no-lineal de un pórtico en 2D.	94
Figura 65: Curva Pushover Ejemplo P2 (UCAS2D).	99
Figura 66: Comparación de los resultados obtenidos con OpenSees y UCAS2D.	99



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: GIC de la Estructura 1.	26
Tabla 2: GIC de la Estructura 2.	26
Tabla 3: GIE de la Estructura 1.	27
Tabla 4: GIE de la Estructura 2.	27
Tabla 5: Factores de forma (Kassimali, 2012).	66
Tabla 6: Propiedades del Acero A36.	77
Tabla 7: Propiedades de la Sección Ejemplo A1.	77
Tabla 8: Tabla de Nodos Ejemplo A1.	77
Tabla 9: Tabla de Conectividad Ejemplo A1.	78
Tabla 10: Tabla de Cargas en Nodos Ejemplo A1.	78
Tabla 11: Tabla de Cargas en Elementos Ejemplo A1.	79
Tabla 12: Desplazamientos Nodales Ejemplo A1.	80
Tabla 13: Reacciones en apoyos Ejemplo A1.	81
Tabla 14: Fuerzas Elementales Globales Ejemplo A1.	81
Tabla 15: Propiedades del Acero A572 Gr 50.	82
Tabla 16: Propiedades de la Sección Ejemplo A2.	83
Tabla 17: Tabla de Nodos Ejemplo A2.	83
Tabla 18: Tabla de Conectividad Ejemplo A2.	83
Tabla 19: Datos Pushover Ejemplo A2 (UCAS2D).	85
Tabla 20: Propiedades de la Sección Ejemplo P1.	87
Tabla 21: Tabla de Nodos Ejemplo P1.	87
Tabla 22: Tabla de Conectividad Ejemplo P1.	88
Tabla 23: Tabla de Cargas en Nodos Ejemplo P1.	88
Tabla 24: Tabla de Coordenadas de Nodos Ejemplo P1.	88
Tabla 25: Desplazamientos Nodales Ejemplo P1.	90
Tabla 26: Reacciones en apoyos Ejemplo P1.	90
Tabla 27: Fuerzas Elementales Globales Ejemplo P1.	91
Tabla 28: Propiedades de la Sección Ejemplo P2.	93
Tabla 29: Tabla de Nodos Ejemplo P2.	94
Tabla 30: Tabla de Conectividad Ejemplo P2.	94
Tabla 31: Tabla de Nodos Adicional Ejemplo P2.	95
Tabla 32: Tabla de Conectividad Adicional Ejemplo P2.	96
Tabla 33: Datos Pushover Ejemplo P2 (UCAS2D).	98



Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Carlos Mauricio Calderón Bernal en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "DESARROLLO DEL PROGRAMA DE ANÁLISIS LINEAL Y NO LINEAL DE ESTRUCTURAS EN DOS DIMENSIONES POR EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio Institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 23 de junio de 2020

Carlos Mauricio Calderón Bernal

C.I: 0106654551



Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Luis Alfonso Morocho Guamán en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "DESARROLLO DEL PROGRAMA DE ANÁLISIS LINEAL Y NO LINEAL DE ESTRUCTURAS EN DOS DIMENSIONES POR EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 23 de junio de 2020

Luis Alfonso Morocho Guamán

C.I: 0106448921



Cláusula de Propiedad Intelectual

Carlos Mauricio Calderón Bernal, autor del trabajo de titulación “DESARROLLO DEL PROGRAMA DE ANÁLISIS LINEAL Y NO LINEAL DE ESTRUCTURAS EN DOS DIMENSIONES POR EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS”, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 23 de junio de 2020

Carlos Mauricio Calderón Bernal

C.I.: 0106654551



Cláusula de Propiedad Intelectual

Luis Alfonso Morocho Guamán, autor del trabajo de titulación "DESARROLLO DEL PROGRAMA DE ANÁLISIS LINEAL Y NO LINEAL DE ESTRUCTURAS EN DOS DIMENSIONES POR EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 23 de junio de 2020

Luis Alfonso Morocho Guamán

C.I: 0106448921



AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, deseo dar las gracias a Dios, por ser el refugio de momentos difíciles y permitirme haber llegado hasta estas instancias alcanzando mis propósitos. Especialmente por ubicar en mi camino a seres increíbles que me han dado su apoyo a lo largo de este trayecto. Dentro de esas personas valiosas a las que también quiero expresar mi gratitud, se encuentran mis padres y hermanos, que constituyen mis principios y valores. De igual manera, un profundo agradecimiento a todos mis profesores, especialmente al Ing. Francisco Flores, por compartir sus conocimientos y valiosos consejos, y por guiarme correctamente en la elaboración del presente proyecto. Además, quiero agradecer y reconocer el extraordinario trabajo de mi compañero y amigo, Luis, dado que, sin su aporte, el proyecto no hubiera sido posible. Finalmente, a mis familiares y amigos, gracias por su ayuda incondicional.

¡De verdad, muchas gracias a todos!

Carlos Mauricio Calderón Bernal

Primero agradezco a Dios por darme la oportunidad de vivir esta etapa de la vida y darme la fuerza para seguir adelante. Agradezco a mis padres Wilson y Amparito que me brindaron su apoyo incondicional, nunca me faltó nada porque ellos estuvieron a mi lado y me guiaron hasta este momento de mi vida. Agradezco a mis hermanos Jaime, Diana y Belen por su cariño y apoyo, gracias ñaños. Agradezco al Ing. Francisco Flores por darme la oportunidad de realizar este proyecto, por enseñarme a mirar más allá de lo simple, y por convertirse en un gran mentor. Agradezco a mi gran amigo Carlos que nunca dio un paso atrás en nuestro proyecto. Finalmente agradezco a mis amigos porque estuvieron a mi lado hasta el final.

Luis Alfonso Morocho Guamán



DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico a mis padres: César (+) y Rosario. Papá, mi mejor maestro, aunque tu viaje haya terminado no olvido lo sabio e inteligente que fuiste, me dejaste tus más preciadas enseñanzas, y siempre serás mi motivo de superación. Cuando pienso en mamá, mi pilar fundamental, siento que mis palabras se debilitan, no encuentro los términos correctos para expresar lo extraordinaria que eres. Simplemente ambos son mi orgullo, los amo y gracias por enseñarme lo importante de la vida. También lo dedico a mis hermanos, Augusto y Gloria, por estar ahí, motivándome, discutiendo o peleando conmigo, sin embargo, ustedes siempre pendiente de mí.

Con todo cariño, para ustedes.

Carlos Mauricio Calderón Bernal

Este proyecto está dedicado a:

A mis Padres, Wilson y Amparito. A mi padre porque lo dio todo para que lograra cumplir esta meta y me enseñaste a ser responsable en la vida. A mi madre porque ella siempre me guio, me cuido, me amo, me enseño que a pesar de que te encuentres en la peor situación siempre hay esperanza. Este sueño cumplido no es solo mío, también es suyo mami. Gracias a ustedes estoy aquí, les debo todo y les prometo dar lo mejor de mí para que siempre estén orgullosos.

A mis hermanos, Jaime, Diana y Belen por motivarme a seguir adelante y no olviden que todos compartimos este sueño. Ya somos (2/4).

A Tati, por su apoyo incondicional durante todo el camino.

A todos ustedes, con amor.

Luis Alfonso Morocho Guamán



1. INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Antes del desarrollo informático el análisis estructural se realizaba por medio de métodos clásicos. La mayoría de los métodos clásicos fueron desarrollados para estructuras específicas y bajo ciertas suposiciones, un ejemplo es el método clásico “Distribución de Momentos”, este método es valioso para resolver pequeños problemas, pero es primitivo en comparación con los métodos matriciales y ha sido reemplazado por ellos en la solución de grandes problemas. Debido al objetivo del método y su complejidad, los métodos clásicos no son recomendados para la implementación en computadora razón por la cual no se han desarrollado en la actualidad (Kassimali, 2012) (McGuire et al., 2014).

Desde mediados de la década de 1950, el desarrollo de los métodos matriciales (método de los desplazamientos y método de las fuerzas) ha continuado a un ritmo acelerado, ya que estos métodos generan grandes sistemas de ecuaciones simultáneas los que pueden ser solucionados rápidamente en computadora. La importancia de la eficiencia computacional permitió que el método de los desplazamientos tome ventaja sobre el método de las fuerzas, ya que para solucionar estructuras grandes el método de los desplazamientos genera menos ecuaciones, esto hace que el cálculo computacional sea menor por ende es más conveniente de programar.

En el Ecuador se tenía limitación en la actualización informática y se utilizaba algoritmos aproximados. Entre 1980 y 1985 empieza el gran desarrollo informático, era posible tener un ordenador en casa. Este avance informático, obligó a incluir en la carrera de Ingeniería Civil la cátedra de “Análisis Matricial de Estructuras”, puesto que ya se pensaba factible programar una estructura en el computador. Con el pasar del tiempo las computadoras mejoraron en capacidad y velocidad, por lo cual resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales, era una tarea muy sencilla en el ordenador, mientras que resolverlas manualmente es casi imposible (Aguilar, 2004).

El gran desarrollo informático no solo se tiene en los ordenadores, también se tiene en los programas de computación. En años pasado se utilizaba Fortran, ahora se utiliza el lenguaje de programación MATLAB. Paralelamente surgieron programas comerciales dedicados específicamente al análisis y diseño estructural como SAP2000 y ETABS.

El desarrollo informático llevó a que el área del Análisis Matricial de Estructuras sea una de las más importantes en la ingeniería estructural, esto influyó a que el método de los desplazamientos sea estudiado y desarrollando cada vez más, y al uso de programas comerciales en la actualidad. Los programas han logrado optimizar el tiempo y facilitar el análisis y diseño estructural, en la actualidad su uso es imprescindible. El presente trabajo desarrolla un programa de análisis lineal y no-lineal estático de estructuras en dos dimensiones (2D) por el método de los desplazamientos.

1.2. Justificación del Proyecto

Los programas comerciales de análisis estructural están basados en métodos matriciales como el método de los desplazamientos, por ello resulta necesario comprender los principios generales en que se fundamenta. El presente trabajo tiene como finalidad desarrollar un programa de análisis lineal y no-lineal estático de estructuras en 2D por medio del método de los desplazamientos aplicando el lenguaje de programación MATLAB. El objetivo del proyecto es académico, orientado a los estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad de Cuenca. Ya que la falta de un desarrollo pedagógico y formativo del método de los desplazamientos en la literatura actual limita al estudiante e impide un aprendizaje



correcto del método. El proyecto está direccionado a que los usuarios comprendan la forma de análisis que realizan los programas comerciales y reforzando conocimientos en la rama de las estructuras.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Desarrollar un programa para el análisis de estructuras en 2D, mediante el método de los desplazamientos.

1.3.2. Objetivos Específicos

1. Implementar una herramienta académica computacional en Matlab para el análisis estructural.
2. Desarrollar un programa piloto para el análisis estructural que pueda ser empleado y complementado.
3. Realizar una herramienta para el análisis lineal y no-lineal de armaduras en 2D.
4. Realizar una herramienta para el análisis lineal y no-lineal de pórticos en 2D.
5. Realizar un manual del programa desarrollado.

1.4. Alcance

El programa desarrollado está destinado para el análisis estructural de armaduras y pórticos, pero no contempla el diseño estructural de los mismos. El cálculo se encuentra restringido en un análisis en dos dimensiones, es decir, se analiza en el plano. Se realiza el análisis estático lineal y no-lineal, no provee de análisis dinámicos. El análisis no-lineal se realiza hasta cuando la matriz de rigidez no alcance su singularidad, es decir, mientras la curva de análisis sea ascendente. Es importante indicar que las secciones que permiten ser modeladas deben ser de sección constante (prismáticas). No se incorpora estudios acerca de apoyos inclinados.

1.5. Organización del trabajo de investigación

El trabajo de titulación está conformado por 7 capítulos, los cuales se organizan de la siguiente manera: Introducción, marco teórico y estado del arte, materiales y métodos, resultados y discusión, conclusiones y recomendaciones, bibliografía, y anexos. Los capítulos se describen a continuación:

Capítulo 1, Introducción: Se establece los antecedentes y justificación del proyecto, en el mismo se incluye la importancia del trabajo, también contiene los objetivos que se propone lograr.

Capítulo 2, Marco Teórico y Estado del Arte: Este capítulo inicia con los conceptos y principios fundamentales del análisis lineal y no-lineal, continua con una introducción al análisis matricial enfocado al método de los desplazamientos, y finaliza con una recopilación de la información sobre los programas de análisis estructural más relevantes en la literatura y se presenta el lenguaje de programación utilizado para desarrollar el proyecto.

Capítulo 3, Materiales y Métodos: En este capítulo se describe la metodología para el análisis de las diferentes estructuras por medio del método de los desplazamientos, y su respectiva implementación en computadora. Inicia con el análisis de la barra en una dimensión (1D), enfocado al efecto axial, se utiliza como complemento para el análisis de estructuras más complejas. Seguido se analiza e implementa el elemento estructural armadura en 2D, se considera las diferentes condiciones de cargas y algunos efectos posibles. Posteriormente se analiza el elemento estructural viga, su análisis (efecto corte y flexión) se utiliza como complemento para el análisis del elemento tipo pórtico. Finalmente se analiza e implementa el elemento estructural tipo pórtico, en el análisis de este elemento (efecto axial, corte y flexión) se considera las diferentes condiciones de cargas y efectos posibles. También se analiza casos especiales que pueden surgir en las estructuras, como: condensación estática, constraints, deformación por corte, etc.



Capítulo 4, Resultados y Discusión: Se muestra los resultados del análisis estructural, generados por el programa desarrollado, además, se valida el programa por medio de los programas SAP2000 y OpenSees.

Capítulo 5, Conclusiones: Finalmente, se analiza la funcionalidad del programa y los objetivos propuestos, además, se da recomendaciones acerca del modo de empleo y futuras mejoras del proyecto.

Capítulo 6, Bibliografía: En este capítulo se recopila todas las referencias utilizadas para desarrollar el proyecto de grado.

Capítulo 7, Anexos: Se presenta información necesaria para el desarrollo del proyecto. Además, se presenta un manual de usuario para el uso correcto del programa desarrollado, en el mismo se explica el ingreso de datos, configuración del modelo inicial, manejo de datos (restricciones, material, sección, cargas, etc.) y presentación de resultados.

2. MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

En el presente capítulo se recopila información general para el desarrollo del proyecto, la misma que está dividida de la siguiente manera:

Desde un inicio se establecen los principios del análisis estático lineal y no-lineal, así como las relaciones fundamentales derivadas del diagrama esfuerzo-deformación. En la siguiente sección, se discute las diferentes metodologías de análisis estructural, en donde se destaca la facilidad de implementación del método de los desplazamientos en su forma matricial, el cual es la base fundamental para el desarrollo del proyecto. Por último, se hace referencia a la evolución de los programas de análisis estructural más relevantes presentes en la literatura y se presenta el lenguaje de programación utilizado para desarrollar el proyecto.

2.1. Linealidad versus No-Linealidad

En la ingeniería estructural todos los problemas son de naturaleza no-lineal. Pero en la mayoría de los casos, es suficiente tratar los problemas como lineales para obtener resultados confiables (Nagarajan, 2019).

El análisis lineal de estructuras se basa en dos hipótesis fundamentales:

- **Linealidad del Material:** “Las estructuras están compuestas de material linealmente elástico; es decir, la relación esfuerzo-deformación para el material estructural sigue la ley de Hooke” (Kassimali, 2012).
- **Linealidad Geométrica:** Supone que los desplazamientos lineales y rotacionales que se producen son pequeños. Se consideran desplazamientos lineales pequeños en comparación con las dimensiones geométricas de la estructura, como son la altura, luz, espesor, etc.; los desplazamientos rotacionales son pequeños comparados con la unidad (E. Blanco et al., 2015). Los desplazamientos son considerados tan pequeños, que la deformación de los elementos pueden ser expresados como funciones lineales de los desplazamientos en los nodos, y las ecuaciones de equilibrio deben ser aplicadas en la estructura con geometría no deformada (Kassimali, 2012).

La razón de estas hipótesis es obtener relaciones lineales entre las cargas aplicadas y las deformaciones resultantes en la estructura. Además, el principio de linealidad deriva al principio de superposición, establece que los efectos que un sistema de fuerzas genera sobre una estructura, son iguales a la suma de los efectos que cada una de las fuerzas genera por separado. También se puede suponer que, los efectos producidos debido a las fuerzas aplicadas no dependen del orden de aplicación de dichas fuerzas (E. Blanco et al., 2015).

Las estructuras de ingeniería generalmente están diseñadas bajo cargas de servicio que generen pequeñas deformaciones, con tensiones por debajo del límite elástico en los diagramas de esfuerzo-deformación de sus materiales. Sin embargo, a niveles de carga más altos, la precisión del análisis lineal generalmente se deteriora a medida que aumentan las deformaciones de la estructura y / o su material se tensa más allá del límite elástico (Kassimali, 2012).

En un análisis no lineal, las restricciones del análisis lineal se eliminan al formular las ecuaciones de equilibrio sobre la geometría deformada de la estructura que no se conoce de antemano, y / o al tener en cuenta los efectos de la inelasticidad del material estructural. Las relaciones de deformación de carga así obtenidas para la estructura no son lineales, y generalmente se resuelven por medio de técnicas iterativas (Kassimali, 2012).

2.1.1. Principios Fundamentales

Existen algunos conceptos que son necesarios en el análisis lineal y no-lineal, derivados principalmente de la resistencia de materiales, la cual a su vez, obedece a la Teoría de la Elasticidad en los principios de: linealidad, superposición, compatibilidad y equilibrio (Cervera & Blanco, 2001).

2.1.1.1. Compatibilidad

Las condiciones de compatibilidad sobre deformaciones y movimientos se fundamentan en (E. Blanco et al., 2015):

- **Condiciones de apoyo:** La deformación debe cumplir las limitaciones de movimientos impuestas por los apoyos.
- **Continuidad en los nodos:** La deformación debe cumplir que los extremos de los elementos que concurran a un nodo compartan la limitación de movimiento impuesta por el determinado enlace.
- **Continuidad en los elementos:** La deformación debe mantener continuidad en los elementos estructurales, es decir, que no se generen agujeros ni solapamientos.

2.1.1.2. Equilibrio

Las fuerzas, las reacciones y toda acción sobre la estructura deben estar en equilibrio estático, esto significa que, en cada una de las direcciones, la fuerza resultante debe ser nula y también el momento resultante debe ser nulo (E. Blanco et al., 2015).

Una estructura está realmente en equilibrio si y solamente si cada uno de los elementos que lo integran están en equilibrio.

2.1.2. Diagrama Esfuerzo-Deformación

Como se mencionó anteriormente el análisis lineal y no-lineal dependen de las propiedades de los materiales, las mismas que son reflejadas a través del diagrama esfuerzo-deformación.

El diagrama esfuerzo-deformación se determina con la ayuda de ensayos, tales como las pruebas de esfuerzo en el acero o en el hormigón, estos ensayos proporcionan información para calcular el esfuerzo nominal (Ecuación 1) y la deformación unitaria (Ecuación 2).

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Ecuación 1: Esfuerzo nominal.

Donde:

σ : Esfuerzo nominal

P : Carga aplicada

A : Área de la sección transversal del elemento

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

Ecuación 2: Deformación unitaria.

Donde:

ϵ : Deformación unitaria

δ : Variación de la longitud

L : Longitud del elemento

Al graficar el esfuerzo nominal en el eje X y la deformación unitaria en el eje Y se genera el diagrama esfuerzo-deformación. Por lo general, hay dos formas de representar este diagrama.

Diagrama Esfuerzo-Deformación de Ingeniería

Para este diagrama se considera en la Ecuación 1 y la Ecuación 2 que el área de la sección transversal (A) y la longitud (L) del elemento se mantienen constante, siendo los valores iniciales del elemento.

En la Figura 1, se observa un diagrama de esfuerzo-deformación del acero. A partir de esta curva se pueden identificar cuatro diferentes comportamientos del material, en función de la deformación inducida en éste. De los cuales se tiene las etapas: elástica, fluencia, endurecimiento y estricción (Hibbeler, 2011).

Comportamiento elástico: Definido desde el inicio de la curva hasta el límite elástico de la Figura 1, que pertenece al rango elástico. Consta de un segmento rectilíneo, de modo que el esfuerzo es proporcional a la deformación, cuya proporcionalidad (pendiente del segmento recto) es igual al módulo de elasticidad del material. A partir de este módulo se deduce la relación lineal entre el esfuerzo y deformación denominada Ley de Hooke (Singer & Pytel, 1994). Si se excede ligeramente del límite de proporcionalidad hasta el límite elástico, se pierde esta relación lineal, sin embargo, si se retira la carga, el elemento recuperará su forma original. El límite elástico no se determina en muchas ocasiones, debido que encuentra muy próximo al límite de proporcionalidad (Hibbeler, 2011).

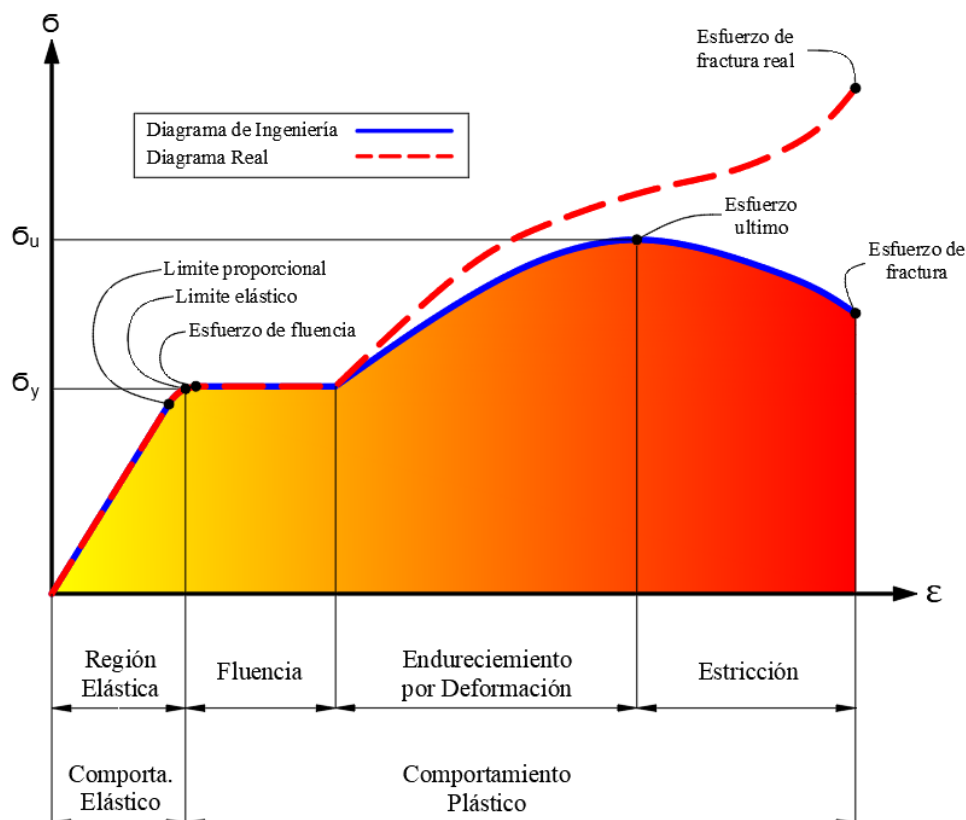


Figura 1: Diagrama Esfuerzo-Deformación del acero (Hibbeler, 2011).

Fluencia: Pertenece al segmento constante de la curva al alcanzar el esfuerzo de cedencia. En esta región generará una deformación permanente en el elemento aun sin la acción de fuerzas aplicadas, denominada deformación plástica. En la Figura 1, se observa que después de llegar al punto de cedencia, el elemento sigue deformándose sin ningún incremento de carga. Si el material se encuentra en este estado se dice que es perfectamente plástico (Hibbeler, 2011).

Endurecimiento por deformación: Definido desde que termina la cedencia hasta el esfuerzo último de la curva de la Figura 1. El elemento puede resistir un aumento de la carga por un alargamiento del elemento, hasta llegar a un esfuerzo máximo o esfuerzo último (Hibbeler, 2011).

Estricción: Definido desde el esfuerzo ultimo hasta el esfuerzo de fractura de la curva de la Figura 1. En esta región, el área de la sección disminuye en un segmento localizado del elemento. Por consiguiente, se forma una constricción o cuello en dicho segmento, a medida que el elemento sigue alargándose. Esta parte diagrama de esfuerzo-deformación tiende a curvarse hacia abajo hasta que el elemento se rompe (Hibbeler, 2011).

2.1.2.1. Diagrama Esfuerzo-Deformación Real

A diferencia del diagrama de ingeniería, en la Ecuación 1 y la Ecuación 2 se emplea el área de la sección transversal (A) y la longitud (L) reales del elemento en el instante que se mide la carga. En deformaciones pequeñas la curva real y la curva de ingeniería son similares. Las diferencias entre los diagramas comienzan a surgir en el rango de endurecimiento por deformación, donde la magnitud de la deformación se vuelve significativa. En particular, existe una amplia divergencia dentro de la región de estricción, ya que en esta zona el área de la sección transversal (A) es decreciente hasta la fractura, generando un esfuerzo creciente en la curva real (Hibbeler, 2011).

Aunque existan variaciones entre el diagrama de ingeniería y el real, la mayoría de diseño estructurales se los realiza dentro del rango lineal.

2.1.2.2. Material Elasto-Plástico Idealizado

Para modelar los materiales se opta por utilizar la curva idealizada con comportamiento Elasto-Plástico, ya que considera la región elástica (análisis lineal cumple Ley de Hooke) y el endurecimiento por deformación pos-fluencia (análisis no-lineal). Además, se ajusta de mejor manera al comportamiento de materiales típicos como el acero y es sencillo definirla (Barrera, 2018). La curva idealizada con comportamiento Elasto-Plástico se muestra en la Figura 2.

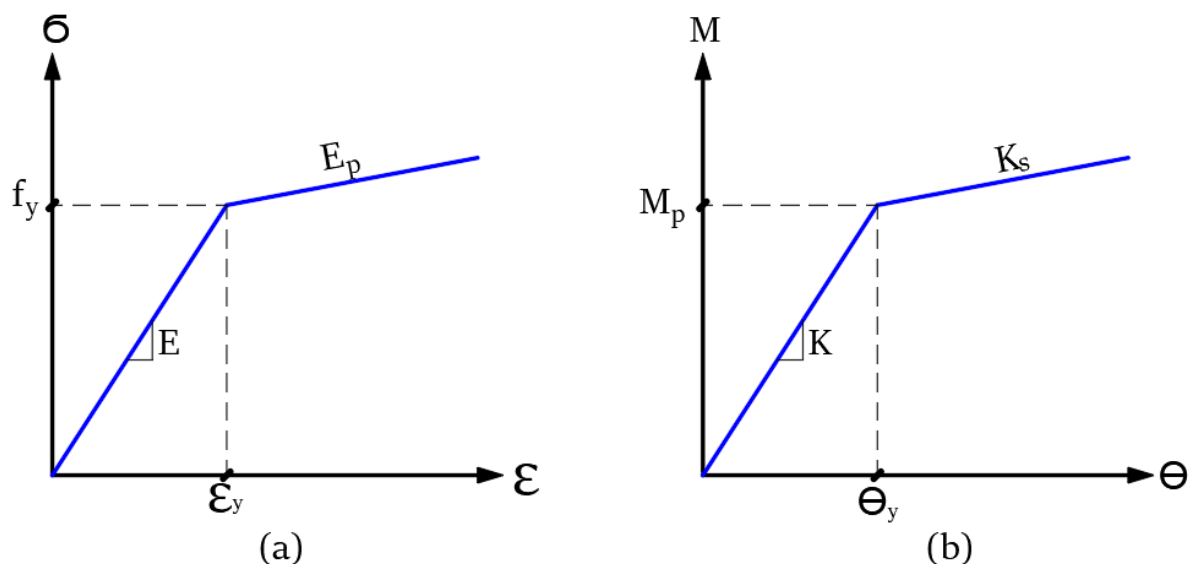


Figura 2: Curva Elasto-Plástica: a) Esfuerzo-Deformación, b) Momento-Curvatura.

La curva Elasto-Plástica se utiliza según el tipo de elemento estructural:

Armadura: Este tipo de elemento solo trabaja a carga axial y la fluencia es total. El comportamiento del material depende del Esfuerzo y la Deformación Unitaria (Figura 2a).

Pórtico: En este tipo de elementos la deformación por flexión es predominante, por lo general esta deformación es crítica en los extremos del elemento. Para modelar el comportamiento inelástico de elementos a flexión se puede utilizar rotulas plásticas (zonas localizadas donde el elemento fluye) y depende del Momento y la Curvatura (Figura 2b).

Para definir las curvas de la Figura 2 se requiere de algunas propiedades que se exponen a continuación:

f_y : Esfuerzo de fluencia	M_p : Momento plástico
ϵ_y : Deformación unitaria de fluencia	θ_y : Rotación de fluencia
E : Módulo de elasticidad en rango elástico	K : Rigidez en rango elástico
E_p : Módulo de elasticidad en rango plástico	K_s : Rigidez en rango plástico

2.1.3. Ley de Hooke

La mayoría de los materiales dentro del rango elástico tienen una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria. Por lo tanto, un incremento en el esfuerzo genera un aumento proporcional a la deformación. Esta teoría se debe a Robert Hooke (1676), que mediante el uso de resortes desarrolló esta relación (Hibbeler, 2011).

La ley de Hooke es expresada de la siguiente forma:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Ecuación 3: Ley de Hooke.

Donde:

- σ : Esfuerzo nominal
- ϵ : Deformación unitaria
- E : Módulo de elasticidad (módulo de Young)

La anterior ecuación representa el segmento recto (rango elástico) del diagrama esfuerzo-deformación. En caso de que el material supere este rango, sufrirá una deformación permanente, dado que incursiona en el rango plástico.

2.2. Análisis Matricial

2.2.1. Historia del Análisis Matricial

El análisis matricial puede ordenarse cronológicamente de la siguiente manera:

1864: James C. Maxwell, introdujo el método de deformaciones consistentes, el cual se considera el precursor del método de la flexibilidad también conocido como el método de las fuerzas (Kassimali, 2012).

1915: George A. Maney, desarrolló el método de desviación de la pendiente, el cual se considera el precursor del método de la rigidez también conocido como el método de los desplazamientos (Kassimali, 2012).

1920: Maney (Estados Unidos) y Ostenfeld (Dinamarca), formaron las ideas básicas para el análisis de armaduras y pórticos, planteando los desplazamientos como incógnitas. Estas ideas, son conceptos fundamentales en el análisis matricial de estructuras (McGuire et al., 2014).

1932: Hardy Cross, introdujo el método de distribución de momentos, este método hizo factible la solución de problemas más complejos. Durante 25 años, la distribución de momentos fue el método principal para el análisis de pórticos. Hoy en día sigue siendo valioso para resolver pequeños problemas, pero es primitivo en comparación con los métodos informáticos y ha sido reemplazado por ellos en la solución de grandes problemas (McGuire et al., 2014).

1950: Inicia el desarrollo de las computadoras, esto revolucionó el análisis estructural. Como las computadoras podían resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas, los métodos de análisis que producían soluciones en esa forma empezaron a tomar fuerza y se comenzó a investigar la forma adecuada de implementarlos (Kassimali, 2012).

1954: “R. K. Livesley, desarrolla el método de la rigidez de forma matricial” (Kassimali, 2012).

1956: M. T. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin y L. J. Topp obtuvieron matrices de rigidez para armaduras y pórticos utilizando el enfoque de elementos finitos, e introdujeron el método de rigidez directa, con la cual se genera la matriz de rigidez de la estructura (Kassimali, 2012).

1970: En Ecuador se contaba con computadoras que ocupaban un gran espacio y tenían baja capacidad, el ingreso de datos era por medio de tarjetas perforadas y posteriormente procesadas por el operador. Con esta limitación no quedaba otra alternativa que usar algoritmos aproximados para resolver las estructuras en lugar de aplicar el método de los desplazamientos que estaba orientado al uso del ordenador (Aguilar, 2004).

1980: En Ecuador empieza el gran desarrollo informático, se suprime la entrada de datos por tarjetas, se graban en casetes, los computadores se conectan a un televisor y es posible tener un ordenador en casa (Aguilar, 2004).

Este avance informático obligó a incluir en las carreras universitarias de Ingeniería Civil la cátedra de “Análisis Matricial de Estructuras”, puesto que ya se vislumbraba que la Informática tendría gran desarrollo (Aguilar, 2004).

En la actualidad, se continua con el desarrollo de los métodos matriciales, dirigidos principalmente a formular procedimientos para el análisis dinámico y no lineal de estructuras, y el desarrollo de técnicas computacionales eficientes para analizar grandes estructuras (Kassimali, 2012).

2.2.2. Métodos Matriciales versus Métodos Clásicos

Los métodos matriciales y clásicos se basan en los mismos principios fundamentales, la diferencia es que las relaciones fundamentales:

- Ecuaciones de equilibrio.
- Ecuaciones de Compatibilidad.
- Relaciones Fuerza – Deformación.

son expresadas de forma matricial, para ser implementadas eficientemente en las computadoras.

La mayoría de los métodos clásicos fueron desarrollados para estructuras específicas y bajo ciertas suposiciones (innecesarios en los métodos matriciales), un ejemplo es el método clásico “Distribución de Momentos” desarrollado por Hardy Cross, este método es válido para el análisis de vigas y pórticos planos que sufren deformaciones por flexión. Las deformaciones generadas por las fuerzas axiales eran ignoradas, esto reducía el esfuerzo computacional, pero al requerir un análisis de desplazamiento lateral por medio de este método, se complicaba, incluso si son pocos los grados de libertad lateral requeridos. Debido al objetivo del método y su complejidad, los métodos clásicos no son recomendados para la implementación en computadora (Kassimali, 2012).

A diferencia de los métodos clásicos, los métodos matriciales se desarrollaron específicamente para ser implementados en computadora; son sistemáticos (para que puedan programarse convenientemente) y generales (el procedimiento analítico es similar para los diferentes tipos de estructuras) (Kassimali, 2012).

Los métodos clásicos son utilizados para analizar estructuras pequeñas, para entender el comportamiento estructural y para derivar relaciones de fuerza - deformación necesarias en el análisis matricial (Kassimali, 2012).

2.2.3. Métodos Matriciales versus Método de los Elementos Finitos

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una extensión del análisis matricial. Los métodos matriciales solo se pueden utilizar para analizar estructuras tipo pórtico, mientras que, el MEF analiza estructuras tipo superficie (“plates” y “shells”) (Kassimali, 2012)

La diferencia principal, es que, en los métodos matriciales, las relaciones fuerza-desplazamiento de los elementos se basan en las soluciones exactas, mientras que, en el método de elementos finitos, estas relaciones son aproximadas y derivadas de los principios de trabajo-energía (Kassimali, 2012).

2.2.4. Método de las Fuerzas y Método de los Desplazamientos

Los métodos matriciales se han desarrollado a un grado tal, que pueden aplicarse a casi cualquier estructura, como son armaduras, vigas, pórticos, etcétera (J. C. McCormac, 2007). En general, existen dos métodos para el análisis matricial de estructuras: el método de las fuerzas o de la flexibilidad y el método de los desplazamientos o de la rigidez.

Método de las Fuerzas: En este método se introducen ecuaciones que satisfacen los requisitos de compatibilidad y de fuerza-desplazamiento para la estructura con el fin de determinar las fuerzas redundantes. En este caso las incógnitas en el sistema de ecuaciones son las fuerzas. Una vez que se han determinado estas fuerzas, se calcula el resto de las fuerzas de reacción sobre la estructura mediante condiciones de equilibrio (Hibbeler, 2012).

Método de los Desplazamientos: Este método se basa en introducir ecuaciones que cumplen las relaciones de fuerza-desplazamiento para los elementos, para luego satisfacer los requisitos de equilibrio de la estructura. En este caso las incógnitas en el sistema de ecuaciones son los desplazamientos. Una vez que se han obtenido los desplazamientos, las fuerzas se determinan a partir de las ecuaciones de compatibilidad y de fuerza-desplazamiento (Hibbeler, 2012).

Cada uno de los métodos de análisis tiene sus ventajas y desventajas particulares, dependiendo de la geometría de la estructura y de su grado de indeterminación. La geometría de la estructura se puede representar mediante un modelo analítico, y para entender el grado de indeterminación es necesario describir el concepto de grado de libertad. Dichos conceptos se encuentran en las secciones 2.2.5, 2.2.6 y 2.2.7.

Cabe destacar que el método de los desplazamientos es el más adecuado para ser implementado como un algoritmo programable en una computadora, principalmente porque no hay modificaciones debidas a condiciones de hiperestaticidad de la estructura, y además, es una herramienta muy efectiva para la estabilidad y la dinámica estructural (Karnovsky & Lebed, 2010) (Luthe, 1971). Por lo que, para el desarrollo del presente proyecto se adaptó el método de los desplazamientos aplicado en forma matricial.

2.2.5. Grados de Libertad (GDL)

El número de GDL en un nodo es igual al número de desplazamientos que deben especificarse para definir de manera única la posición de ese nodo (Sennett, 1994). Como máximo un nodo puede tener 6

desplazamientos (3 traslacionales y 3 rotacionales). El número de grados de libertad depende del tipo de estructura analizada, algunos ejemplos son los siguientes:

- Barra Unidimensional: Tiene 1 GDL en cada nodo \rightarrow Traslación en 1 dirección.
- Armaduras en dos dimensiones: Tiene 2 GDL en cada nodo \rightarrow Traslación en 2 direcciones.
- Vigas: Tiene 2 GDL en cada nodo \rightarrow Traslación en una dirección y rotación en 1 dirección.
- Pórticos en dos dimensiones: Tiene 3 GDL en cada nodo \rightarrow Traslación en 2 direcciones y rotación en 1 dirección.
- Armadura en tres dimensiones: Tiene 3 GDL en cada nodo \rightarrow Traslación en 3 direcciones.
- Pórticos en tres dimensiones: Tiene 6 GDL en cada nodo \rightarrow Traslación en 3 direcciones y rotación en 3 direcciones.
-

2.2.6. Indeterminación Cinemática y Estática

Según el método de análisis se establece el tipo de indeterminación. Si se emplea el método de los desplazamientos, es necesario determinar el grado de indeterminación cinemática. En cambio, si se utiliza el método de las fuerzas, es necesario determinar el grado de indeterminación estática.

Grado de Indeterminación Cinemática (GIC)

Los GDL en la estructura se puede dividir en 2 tipos:

- GDL sin restricciones: También conocidos como GDL libres, en estos los desplazamientos nodales son desconocidos, sin embargo, las fuerzas nodales son conocidas (fuerzas sobre la estructura) (Nagarajan, 2019).
- GDL con restricciones: Los desplazamientos son conocidos (son los restringidos por los apoyos), sin embargo, las fuerzas nodales son desconocidas (reacciones de los apoyos) (Nagarajan, 2019).

En el método de los desplazamientos, las incógnitas son los desplazamientos, lo que implica que el número de GDL sin restricciones es igual al GIC de la estructura.

En las siguientes estructuras se determina su respectivo GIC, al considerar que no hay deformación axial y al omitir la ecuación de equilibrio en la dirección axial.

Estructura 1: Viga con 1 articulación y 2 simples apoyo (Figura 3).

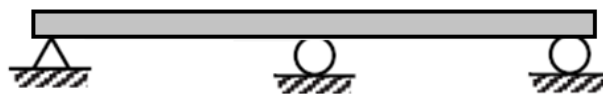


Figura 3: Viga articulada y doblemente apoyada (Flores, 2018).

Identificación de los GDL en la estructura 1 (Figura 4):

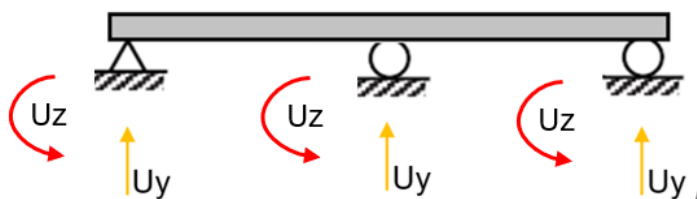


Figura 4: Diagrama de GDL de la estructura 1 (Flores, 2018).

Tabla 1: GIC de la Estructura 1.

# GDL	# GDL Restringido	GIC
6	3	3

Estructura 2: Viga doblemente apoyada y empotrada (Figura 5)



Figura 5: Viga doblemente empotrada y apoyada (Flores, 2018).

Identificación de los GDL en la estructura 1 (Figura 6):

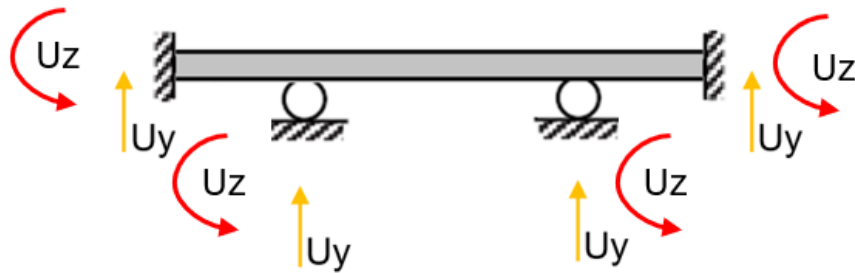


Figura 6: Diagrama de GDL de la estructura 2 (Flores, 2018).

Tabla 2: GIC de la Estructura 2.

GDL	# GDL Restringido	GIC
8	6	2

Grado de Indeterminación Estática (GIE)

Las estructuras pueden ser:

- Estáticamente Determinada: Es aquella en la que todas las fuerzas desconocidas (reacciones en apoyos), pueden determinarse utilizando solo ecuaciones de equilibrio (Nagarajan, 2019).
- Estáticamente Indeterminada: En algunas estructuras, las ecuaciones de equilibrio por sí solas no serán suficientes para encontrar las reacciones. Estos tipos de estructuras se conocen como estructura estáticamente indeterminada (Nagarajan, 2019).

En el método de las fuerzas, las incógnitas son las fuerzas, lo que implica que el GIE es igual al número de ecuaciones en exceso de las ecuaciones de equilibrio necesarias para encontrar todas las fuerzas desconocidas en la estructura (Nagarajan, 2019).

En las siguientes estructuras se determina su respectivo GIE, al considerar que no hay deformación axial y al omitir la ecuación de equilibrio en la dirección axial.

Estructura 1: Viga con 1 articulación y 2 simples apoyo (Figura 7).

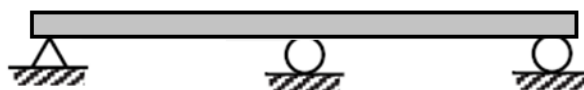


Figura 7: Viga articulada y doblemente apoyada (Flores, 2018).

Diagrama de cuerpo libre (Figura 8):

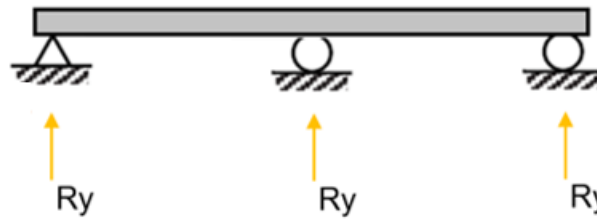


Figura 8: Diagrama de cuerpo libre de la estructura 1 (Flores, 2018).

Tabla 3: GIE de la Estructura 1.

# Reacciones	# Ec. Equilibrio	GIE
3	2	1

Estructura 2: Viga doblemente apoyada y empotrada (Figura 9).

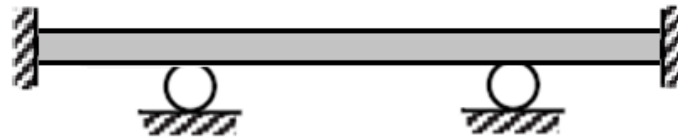


Figura 9: Viga doblemente empotrada y apoyada (Flores, 2018).

Diagrama de cuerpo libre (Figura 10):

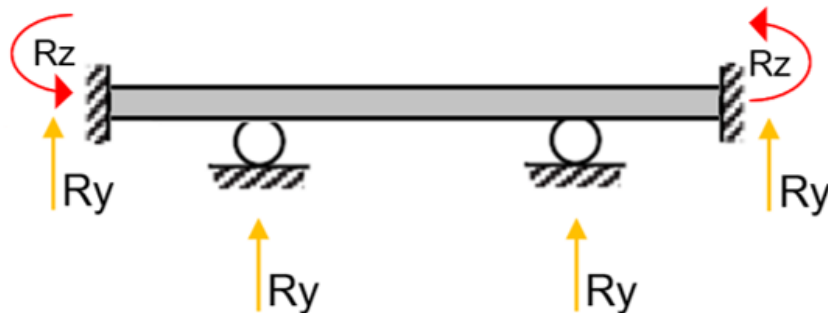


Figura 10: Diagrama de cuerpo libre de la estructura 2 (Flores, 2018).

Tabla 4: GIE de la Estructura 2.

# Reacciones	# Ec. Equilibrio	GIE
6	2	4

Como se puede observar en la Tabla 1 y en la Tabla 3 correspondiente a una estructura pequeña, el GIC es mayor al GIE, lo que implica que el método de las fuerzas es más conveniente en estos casos. Mientras que, en la Tabla 2 y Tabla 4 correspondiente a una estructura más compleja a la anteriormente mencionada, el GIE es mayor al GIC, lo que implica que el método de los desplazamientos es más eficiente mientras mayor sea el número de GDL en la estructura.

2.2.7. Modelo Analítico

El modelo analítico es la transformación de la estructura real a una estructura idealizada, con el objetivo de simplificar la complejidad de las estructuras reales, descartando características que no tenga gran efecto en

el análisis. Las estructuras serán idealizadas por medio de líneas (elementos) y puntos (nodos) (Kassimali, 2012; McGuire et al., 2014).

Elementos: Las estructuras se considera como un conjunto de elementos. Estos elementos son la idealización de los miembros de la estructura real, los mismos que tienen propiedades geométricas y del material. Los elementos son la parte de la estructura, donde se aplicará la relación Fuerza – Desplazamiento (Kassimali, 2012; McGuire et al., 2014; Nagarajan, 2019).

Nodos: Son los puntos de conexión entre los elementos, generalmente se encuentran al inicio y al final de cada elemento. En estos puntos se aplicará las ecuaciones de equilibrio y se encontrarán los desplazamientos (Sennett, 1994; Vera, 2016).

En la Figura 11, se muestran la estructura real y su modelo analítico.

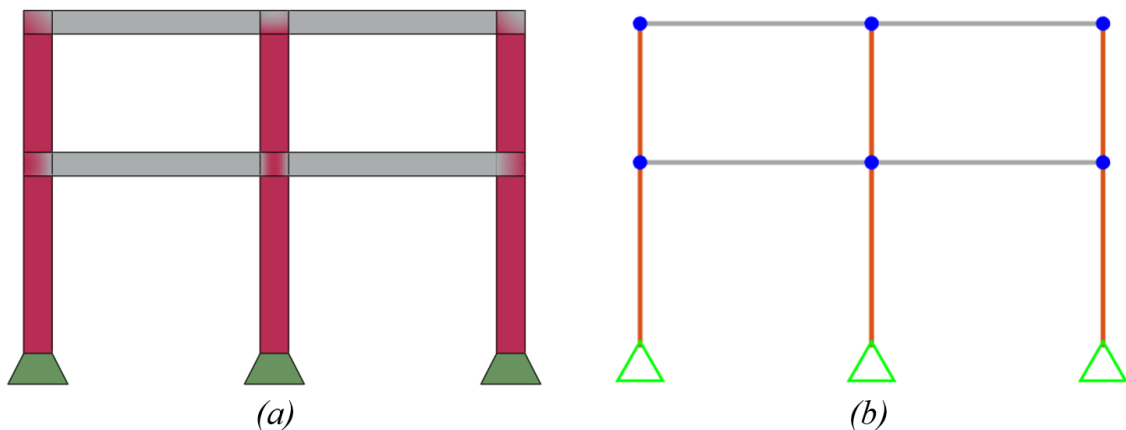


Figura 11: (a) Estructura, (b) Modelo Analítico.

2.3. Programas de Análisis Estructural

Con el desarrollo de los ordenadores, el análisis estructural fue una de las primeras ramas de la ingeniería en ser beneficiada, posteriormente se desarrollaron programas comerciales que pusieron a disposición de las firmas especializadas esta nueva y poderosa herramienta. Estos programas fueron desarrollados en universidades con el patrocinio de los fabricantes de equipos, como la compañía IBM. En esta época se desarrolló el programa STRESS (*Structural Engineering System Solver*), que marcó un hito en el empleo del computador para analizar estructuras (Uribe, 2000). Con el paso del tiempo surgieron diferentes programas comerciales que se han ido perfeccionándose cada vez más.

A continuación, se presentan las características de algunos programas comerciales reconocidos.

2.3.1. STRESS

El programa STRESS (Structural Engineering System Solver), fue desarrollado por el profesor Steven J. Fenves para la IBM, en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), entre 1962 y 1963. Fue escrito en FORTRAN y Assembler. Constituyó el primer lenguaje en ingeniería estructural orientado hacia el problema. En consecuencia, el usuario no necesita tener conocimientos de programación propiamente dicha. Permite efectuar análisis lineales y elásticos. Su influencia ha sido muy grande en los casi 60 años transcurridos desde su aparición, muchos programas utilizan los mismos principios (Uribe, 2000).

2.3.2. SAP 2000

SAP2000 es la última versión, del programa de análisis estructural SAP, desarrollado por el profesor Edward L. hace más de 50 años, para el análisis tridimensional, estático y dinámico de estructuras por el



método de los elementos finitos (Uribe, 2000). SAP 2000 integra una interfaz gráfica en 3D orientado a objetos, preparado para realizar la modelación, análisis y dimensionamiento de un amplio conjunto de problemas de ingeniería estructural (Computers and Structures, Inc., 2017), como: puentes, edificios, estadios, presas, estructuras industriales y estructuras marítimas.

2.3.3. ETABS

ETABS es un software para análisis estructural y dimensionamiento tanto de edificios de un piso hasta rascacielos de varios pisos. Resultado de 40 años de investigación y desarrollo continuo (Computers and Structures, Inc., 2018). Realiza análisis estático y dinámico, tanto lineal como no lineal, permite la utilización de elementos no lineales tales como: aislantes sísmicos, disipadores, amortiguadores, etc. Permite el uso de estructuras pórticos, muros pantalla y combinados a través de una completa interacción entre ambos (Camacho & Romero, 2012).

2.3.4. OpenSees

“OpenSees (Open System for Earthquake Engineering Simulation), es un software libre desarrollado por la Universidad de California, Berkeley, que permite desarrollar aplicaciones y herramientas para la simulación de la respuesta sísmica de sistemas estructurales y geotécnicos” (Mazzoni et al., 2006) (Barrera, 2018).

“OpenSees tiene capacidades avanzadas para modelar y analizar la respuesta no lineal de los sistemas estructurales utilizando una amplia gama de modelos de materiales, elementos y algoritmos de solución. OpenSees proporciona métodos no lineales estáticos y dinámicos, solucionadores de ecuaciones y métodos para manejar restricciones” (Berkeley, 2006).

2.3.5. CYPECAD

CYPECAD es un software que fue creado en España en la década de los 80 por la empresa CYPE Ingenieros S. A., para realizar el cálculo y dimensionamiento de estructuras civiles mediante el método matricial, realiza análisis en 2 y 3 dimensiones ante cargas horizontales y verticales. Además, incorpora funciones para generar presupuestos, programas de ayuda para el cumplimiento de la normativa, cálculo de instalaciones, etc. (Jurado, 2016; Vilema, 2014).

2.4. MATLAB

MATLAB es un potente software informático, utilizado actualmente en las instituciones educativas para resolver problemas relacionados con las matemáticas y la ingeniería. El nombre del software MATLAB significa “Laboratorio Matriz”, debido a que el software fue diseñado específicamente para el manejo eficiente de las operaciones matriciales, efectivo en el análisis matricial de estructuras. Las funciones incorporadas de MATLAB lo han convertido en la herramienta popular preferida por muchos educadores en diversos campos de la ingeniería (Navaee & Das, 2002).

Enfocado en la parte educativa específicamente en la rama del análisis estructural, los programas desarrollados en MATLAB pueden servir como una excelente herramienta, para proporcionar a los estudiantes una mejor comprensión del comportamiento de estructuras bajo diferentes condiciones de carga. Es decir, usando los scripts de MATLAB, diferentes escenarios pueden ser creados y estudiados alterando la geometría de la estructura, la magnitud y el tipo de cargas aplicadas, condiciones de soporte y propiedades del material. Se percibe que los archivos que son capaces de analizar una amplia variedad de estructuras generan un mayor entusiasmo e interés entre los alumnos (Navaee & Das, 2002).

3. MATERIALES Y MÉTODOS

En el presente capítulo se detalla el proceso de análisis e implementación de los diferentes tipos de elementos estructurales por medio del método de los desplazamientos. Se inicia con el análisis de la barra en una dimensión (1D), puesto que, es el elemento estructural más simple y su análisis (efecto axial) se utiliza como complemento para estructuras más complejas, seguido se analiza e implementa el elemento estructural armadura en 2D, se considera las diferentes condiciones de cargas y efectos posibles en este tipo de estructura. Posteriormente se analiza el elemento estructural viga, su análisis (efecto corte y flexión) se utiliza como complemento para el análisis del elemento tipo pórtico, finalmente se analiza e implementa el elemento estructural tipo pórtico, el análisis de este elemento (efecto axial, corte y flexión) es la combinación de los análisis anteriores, se considera las diferentes condiciones de cargas y efectos posibles en este tipo de estructura. También se analiza casos especiales que pueden surgir en las estructuras, como: condensación estática, constraints, deformación por corte, etc.

3.1. Barra Unidimensional (1D)

La barra en 1D (Figura 12) es el elemento estructural más simple, debido a que cada nodo de este elemento tiene un GDL (2 GDL por elemento), el mismo que corresponde a una traslación en la dirección longitudinal de la barra (Sennett, 1994). Este elemento está en tensión axial, por esta razón, solo trabaja con cargas en dirección de su eje longitudinal como: cargas puntuales, cargas distribuidas y efectos que se pueden dar a lo largo del elemento.

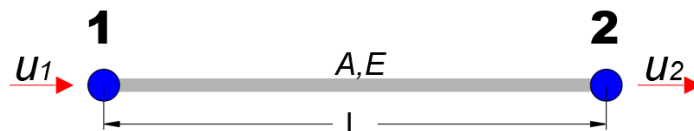


Figura 12: Barra en 1D.

3.1.1. Rigidez

La rigidez se define como la fuerza necesaria para obtener un desplazamiento unitario en el nodo si se restringe el desplazamiento en todos los demás nodos de la estructura (J. McCormac & Nelson, 2006).

En el método de los desplazamientos en forma matricial, los desplazamientos en los nodos de un modelo analítico son determinados al resolver un sistema de ecuaciones simultáneas, formadas por ecuaciones de compatibilidad, comportamiento y de equilibrio. Se parte de las ecuaciones de compatibilidad, para incorporarlas a las de comportamiento y finalmente este resultado se introduce en las ecuaciones de equilibrio. Con ello se formula las fuerzas aplicadas en función de los desplazamientos y se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que puede ser expresado en forma matricial (J. Blanco et al., 2012) (Kassimali, 2015), también conocida como la relación Fuerza-Desplazamiento.

$$\{F\} = [K] \{u\}$$

Ecuación 4: Relación Fuerza-Desplazamiento.

Donde:

$\{F\}$: Vector de cargas externas

$[K]$: Matriz de rigidez de la estructura

$\{u\}$: Vector de desplazamientos en los nodos

3.1.2. Matriz de Rigidez Elemental

Como se describió anteriormente, la relación *Fuerza-Desplazamiento* puede ampliarse a una estructura de múltiples GDL (Ecuación 4), en el caso del elemento barra en 1D, la relación se expande a un sistema de 2 GDL como se muestra a continuación:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 5: Relación Fuerza-Desplazamiento para Barra en 1D.

Para determinar las fuerzas en el elemento (F) y los coeficientes de rigidez (k_{ij}), se analiza cada GDL por medio de desplazamientos unitarios independientes. Para el análisis de un elemento barra en 1D se analizan dos casos:

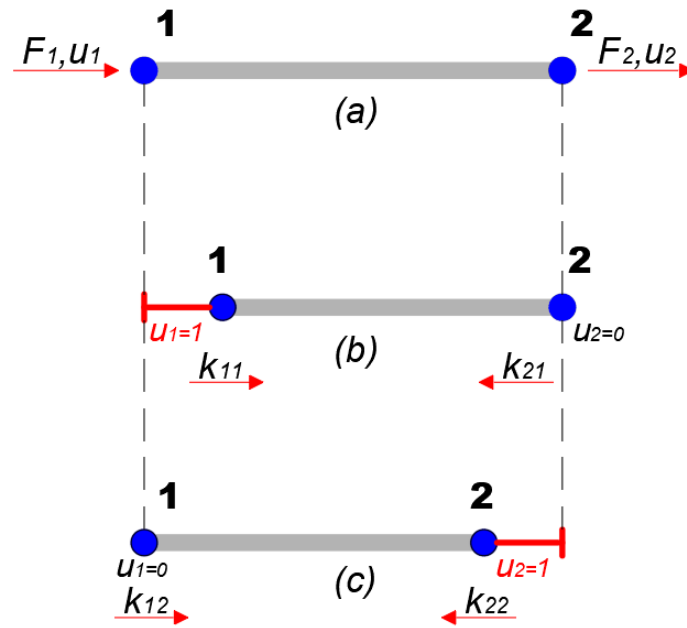


Figura 13: (a) Barra en 1D, (b) Caso 1, (c) Caso 2.

Caso 1: Se aplica un desplazamiento unitario en el nodo 1 ($u_1 = 1$) y se conserva el resto de los nodos en posición original ($u_2 = 0$), con esto se obtiene la configuración deformada mostrada en la Figura 13b. Al crear esta configuración se generan fuerzas internas (k_{11} y k_{21}) en el elemento correspondientes a un desplazamiento unitario, las mismas que deben estar en equilibrio.

$$\sum F_x = 0$$

$$k_{11} = -k_{21}$$

Para obtener la fuerza externa (F) correspondiente a un desplazamiento (u) cualquiera, se utiliza la relación *Fuerza-Desplazamiento*, donde se obtiene:

$$F_1 = k_{11} \cdot u_1$$

$$F_2 = k_{21} \cdot u_1$$

Correspondientes a las fuerzas en la configuración deformada del caso 1.

Caso 2: Se aplica un desplazamiento unitario en el nodo 2 ($u_2 = 1$) y se conserva el resto de los nodos en posición original ($u_1 = 0$), con esto se obtiene la configuración deformada mostrada en la Figura 13c. Al crear esta configuración se generan fuerzas internas (k_{12} y k_{22}), similar al caso 1 se obtiene los coeficientes de rigidez y sus respectivas fuerzas externas.

$$\sum F_x = 0$$

$$k_{12} = -k_{22}$$

$$F_1 = k_{12} \cdot u_2$$

$$F_2 = k_{22} \cdot u_2$$

Correspondientes a las fuerzas en la configuración deformada del caso 2.

Al analizar los dos casos anteriores, se puede realizar superposición de efectos para obtener un análisis completo de las posibles configuraciones de deformada en el elemento, donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$F_1 = k_{11} \cdot u_1 + k_{12} \cdot u_2$$

$$F_2 = k_{21} \cdot u_1 + k_{22} \cdot u_2$$

Este sistema de ecuaciones se puede colocar de forma matricial como se observa en la Ecuación 5. De acuerdo con resistencia de materiales, la deformación axial (u_A), generada por una fuerza axial en el nodo (F_A) se describe en la Ecuación 6.

$$u_A = \left(\frac{L}{EA} \right) * F_A$$

Ecuación 6: Desplazamiento generado por una fuerza axial.

Donde:

u_A : Desplazamiento axial

A : Área transversal de la sección

L : Longitud del elemento

F_A : Fuerza axial

E : Módulo de elasticidad

Al reescribir la Ecuación 6 se obtiene $F_A = \left(\frac{EA}{L} \right) * u_A$, el término en paréntesis es análogo a la constante de un resorte en la Ley de Hooke, por lo tanto, este término es el coeficiente de rigidez al aplicarse una fuerza axial en el nodo (J. McCormac & Nelson, 2006). Entonces la fuerza necesaria (k_{11}) en la dirección del GDL u_1 , para generar un desplazamiento unitario en u_1 , esta expresado como:

$$k_{11} = k_{22} = \frac{EA}{L}$$

Al incorporar los valores de rigidez en la Ecuación 5, se determina la relación *Fuerza-Desplazamiento* elemental (por elemento) para una barra en 1D (Ecuación 7).

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 7: Relación Fuerza-Desplazamiento Elemental para Barras en 1D.

Donde:

$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$: Vector de fuerzas elementales.

$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$: Matriz de rigidez elemental

$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$: Vector de desplazamientos nodales

La Ecuación 7 es una relación unitaria para barras en 1D, a la cual se le puede aplicar cualquier caso de desplazamientos y fuerzas en general.

Propiedades de la Matriz de Rigidez: La matriz de rigidez cuenta con ciertas propiedades (E. Blanco et al., 2015; Nagarajan, 2019), las mismas que son enumeradas a continuación:

- La matriz de rigidez es una matriz cuadrada de orden n , donde n representa los GDL de la estructura.
- La matriz de rigidez es simétrica, es decir $K^T = K$.
- La matriz de flexibilidad, determinada en el método de las fuerzas, es la inversa de la matriz de rigidez.
- La matriz de rigidez es singular, es decir, que todo elemento puede sufrir un movimiento arbitrario sin considerar fuerzas que actúen en sus extremos, sin embargo, se puede eliminar la singularidad cuando se aplican las condiciones de borde como son los apoyos.

3.1.3. Combinación de Rigidez de Elementos

Para el análisis de una estructura en su totalidad, la relación *Fuerza-Desplazamiento* general (estructura total) debe ser la combinación de las relaciones *Fuerza-Desplazamiento* elementales. A continuación, se va a analizar una estructura conformada por 3 elementos barra en 1D, como se muestra en la Figura 14.



Figura 14: Diagrama de Cuerpo Libre de Estructura conformada por Elementos tipo Barra en 1D.

Note que F_i son fuerzas aplicadas en los nodos o reacciones de la estructura (Fuerzas externas). Al realizar equilibrio en los nodos, $F_1 = F_{11}$, $F_2 = F_{21} + F_{22}$, $F_3 = F_{32} + F_{33}$, y $F_4 = F_{43}$. Las fuerzas F_{ij} corresponden a la fuerza internas en el nodo i del elemento j . La combinación de rigideces termina siendo el equilibrio de las fuerzas F_{ij} en cada nodo.

Para detallar la combinación de rigidez de elementos se analizará la estructura mostrada en la Figura 15.

Estructura: Barra en 1D empotrada.

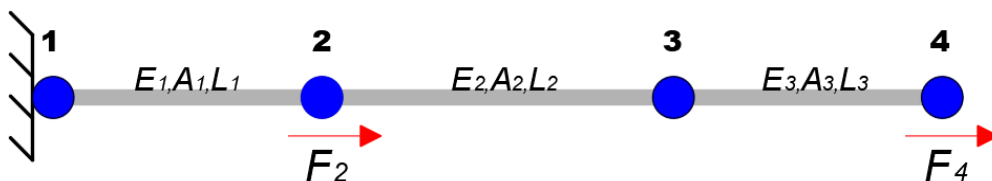


Figura 15: Estructura Barra en 1D Empotrada.



El proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez general se describe con los siguientes pasos:

Paso 1: Determinar las relaciones *Fuerza-Desplazamiento* elementales.

Primero se enumera cada elemento de la estructura, luego se calcula los coeficiente de rigidez (k) por medio de la Ecuación 7 y se coloca un superíndice correspondiente al número del elemento en análisis, finalmente se arma la relación *Fuerza-Deformación* elemental como la Ecuación 7.

Elemento 1

$$k^1 = \frac{E_1 A_1}{L_1} \rightarrow \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 \\ -k^1 & k^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2

$$k^2 = \frac{E_2 A_2}{L_2} \rightarrow \begin{Bmatrix} F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3

$$k^3 = \frac{E_3 A_3}{L_3} \rightarrow \begin{Bmatrix} F_{33} \\ F_{43} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^3 & -k^3 \\ -k^3 & k^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Paso 2: Colocar la nomenclatura guía en las matrices de rigidez elemental según los GDL.

Alrededor de cada matriz de rigidez elemental obtenida en el paso 1 se colocan los GDL respectivos, posteriormente, a las componentes de rigidez se les incorpora dos subíndices, el primer subíndice es GDL lateral (fila) y el segundo subíndice es GDL superior (columna) como se muestra a continuación:

$$u_i \downarrow \quad u_j \downarrow$$

$$\begin{matrix} u_i \rightarrow \\ u_j \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} k_{i \ i}^n & k_{i \ j}^n \\ k_{j \ i}^n & k_{j \ j}^n \end{bmatrix}$$

Para la estructura analizada, se obtiene las siguientes nomenclaturas.

Elemento 1

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & -k_{12}^1 \\ -k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2

$$\begin{Bmatrix} F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22}^2 & -k_{23}^2 \\ -k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3

$$\begin{Bmatrix} F_{33} \\ F_{43} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{33}^3 & -k_{34}^3 \\ -k_{43}^3 & k_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Paso 3: Analizar dimensiones de la relación *Fuerza-Desplazamiento* general.

Las dimensiones de los vectores y matrices dependen del número de GDL (n) en la estructura, las dimensiones son las siguientes:

- $\{F\}$: Vector de fuerzas externas $\rightarrow n \times 1$
- $[K]$: Matriz de rigidez total $\rightarrow n \times n$
- $\{u\}$: Vector de desplazamientos $\rightarrow n \times 1$



Para la estructura en análisis, se tiene 4 nodos lo que implica 4 GDL (elementos barra en 1D), las dimensiones de los componentes de la relación *Fuerza-Desplazamiento* general son:

$$\begin{aligned} \{F\} &= [K] \{u\} \\ 4 \times 1 &= 4 \times 4 \quad 4 \times 1 \end{aligned}$$

Paso 4: Colocar la nomenclatura guía en la relación *Fuerza-Desplazamiento* general según los GDL.

Se ordenan los GDL y se colocan como guía alrededor de la relación *Fuerza-Desplazamiento* general, finalmente se coloca un subíndice como nomenclatura del paso 2.

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} u_{1\rightarrow} \\ u_{2\rightarrow} \\ u_{3\rightarrow} \\ u_{4\rightarrow} \end{matrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & \cdots \\ k_{21} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & k_{34} \\ \cdots & \cdots & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Paso 5: Combinación de rigideces.

Para obtener el vector de fuerzas externas, se acumula todas las fuerzas aplicadas en cada GDL, estas fuerzas se buscan en las diferentes relaciones *Fuerza-Desplazamiento* elementales, y se coloca en la posición respectiva al GDL en la relación *Fuerza-Desplazamiento* general según la nomenclatura del paso 4.

Para obtener la matriz de rigidez general, se acumulan todos los coeficientes de rigidez que corresponden a los GDL similares que se encuentran en las diferentes relaciones *Fuerza-Desplazamiento* elementales. Con la ayuda de las nomenclaturas colocadas se puede decir que, para obtener la matriz de rigidez general, se acumulan todos los coeficientes de rigidez con igual subíndice y diferente superíndice que se encuentran en las diferentes relaciones *Fuerza-Desplazamiento* elementales, y este resultado se coloca en la relación *Fuerza-Desplazamiento* general en la posición que el subíndice lo indica. Los espacios vacíos se completan con cero.

Para la estructura analizada, se obtiene las siguientes nomenclaturas.

$$\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{21} + F_{22} \\ F_{32} + F_{33} \\ F_{43} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & -k_{12}^1 & 0 & 0 \\ -k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & -k_{23}^2 & 0 \\ 0 & -k_{32}^2 & k_{33}^2 + k_{33}^3 & -k_{34}^3 \\ 0 & 0 & -k_{43}^3 & k_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Reemplazando los valores obtenidos en el paso 1, se obtiene la relación *Fuerza-Desplazamiento* general.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} + \frac{E_3 A_3}{L_3} & -\frac{E_3 A_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & \frac{E_3 A_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

3.1.4. Método Partición de la Matriz de Rigidez

Para encontrar los desplazamientos y reacciones en la estructura se debe solucionar el sistema de ecuaciones generado por la relación *Fuerza-Desplazamiento* general, para tener una eficiencia computacional se hace una partición en función de los GDL restringidos.

Se debe tener en cuenta que en el análisis de estructuras en un nodo se conoce los desplazamientos (restricciones o desplazamientos iniciales) o las fuerzas (fuerzas aplicadas) pero no ambos (Sennett, 1994).

Para realizar la partición de la matriz de rigidez se clasifican los GDL dependiendo de sus restricciones, se dividen en:

- **GDLs:** Son los GDL donde se conocen los desplazamientos (GDL restringidos) y se generan las reacciones.
- **GDLp:** Son los GDL donde se desconocen los desplazamientos (GDL libres) y se aplican las fuerzas.

Al clasificar los GDL se puede dividir la relación *Fuerza-Desplazamiento* general en submatrices y subvectores, según Hurtado (2012), la partición puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \{F_p\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{ps}] \\ [K_{sp}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_p\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix}$$

Ecuación 8: Partición de la Matriz de Rigidez.

Donde:

$\{F_p\}$: Subvector de fuerzas en los GDLp

$\{F_s\}$: Subvector de fuerzas en los GDLs

$[K_{pp}]$: Submatriz de rigidez correspondiente a los GDLp en fila y columna

$[K_{ps}]$: Submatriz de rigidez correspondiente a los GDLp en fila y GDLs en columna

$[K_{sp}]$: Submatriz de rigidez correspondiente a los GDLs en fila y GDLp en columna

$[K_{ss}]$: Submatriz de rigidez correspondiente a los GDLs en fila y columna

$\{u_p\}$: Subvector de desplazamientos en los GDLp

$\{u_s\}$: Subvector de desplazamientos en los GDLs

Al realizar la partición se puede notar que:

- La submatrices $[K_{pp}]$ y $[K_{ss}]$ son matrices cuadradas.
- La submatriz $[K_{ps}]$ es igual a la submatriz $[K_{sp}]^T$.
- Al subvector $\{u_s\}$ (desplazamientos conocidos) le corresponde el subvector $\{F_s\}$ (fuerzas desconocidos/reacciones).
- Al subvector $\{u_p\}$ (desplazamientos desconocidos) le corresponde el subvector $\{F_p\}$ (fuerzas aplicadas).

Al realizar la partición se obtiene las siguientes ecuaciones.

$$\{F_p\} = [K_{pp}]\{u_p\} + [K_{ps}]\{u_s\}$$

Ecuación 9: Partición superior.

$$\{F_s\} = [K_{sp}]\{u_p\} + [K_{ss}]\{u_s\}$$

Ecuación 10: Partición inferior.

Con la Ecuación 9 se determina los desplazamientos desconocidos al colocar la ecuación de la siguiente manera:

$$\{u_p\} = [K_{pp}]^{-1}(\{F_p\} - [K_{ps}]\{u_s\})$$

Ecuación 11: Desplazamientos desconocidos.

Después de determinar los desplazamientos se utiliza la Ecuación 10 para determina las reacciones en los apoyos. Sin embargo, si existen fuerzas externas aplicadas en apoyos o fuerzas equivalentes que coinciden en los apoyos (tales fuerzas explicadas en la Sección 3.1.7), las reacciones quedan determinadas por la Ecuación 12:

$$\{R\} = \{F_s\} - \{F_{ext}\}_s - \{F_{Equiv}\}_s$$

Ecuación 12: Reacciones en apoyos.

Donde:

$\{R\}$: Vector de reacciones en apoyos

$\{F_s\}$: Vector de fuerzas desconocidas

$\{F_{ext}\}_s$: Vector fuerzas externas aplicas en los GDL s

$\{F_{Equiv}\}_s$: Vector de fuerzas equivalentes en los GDL s (Ver Sección 3.1.7)

3.1.5. Desplazamientos Iniciales en Apoyos

Generalmente cuando se analiza los desplazamientos en apoyos, inmediatamente se asume que hay un desplazamiento nulo, sin embargo, hay que tener en cuenta el caso donde se puede dar desplazamientos iniciales en apoyos, debidos a la consolidación o expansión del suelo o a una colocación no precisa de los cimientos de la estructura (Sennett, 1994). En cualquiera de los casos un ingeniero geotécnico hará una estimación del posible movimiento en el apoyo, lo que proporciona la información del desplazamiento inicial al ingeniero estructural.

Estos desplazamientos iniciales son los correspondientes a los desplazamientos en los *GDLs*, por ende, son conocidos. Estos desplazamientos deben ser reemplazados en el subvector $\{u_s\}$ de la Ecuación 11 en la posición correspondiente a su GDL (J. Blanco et al., 2012).

3.1.6. Fuerzas No-Nodales

En el caso de existir fuerzas actuantes concentradas o distribuidas o ambas, aplicadas en el interior de un elemento, son denominadas fuerzas no nodales. Una alternativa para el análisis mediante el método de los desplazamientos es discretizar el elemento, agregando tantos nodos como fuerzas no nodales existentes en la estructura, para simular que las fuerzas son aplicadas en nodos (fuerzas nodales). Sin embargo, en algunos casos serán necesarios agregar una gran cantidad de nodos para aproximarse a una solución razonable. Aunque esto implique que surja complicaciones en su solución, dado que se aumenta el número de GDL, consecuentemente se aumenta la dimensión de la matriz de rigidez, y de los vectores de fuerzas y desplazamientos de la estructura, demandando requisitos de tiempo y almacenamiento (Sennett, 1994). Entonces, se hace uso de fuerzas de empotramiento perfecto, que permiten transformar cargas internas en el elemento a fuerzas nodales equivalentes.

3.1.7. Fuerzas de Empotramiento Perfecto

Para entender el método de las fuerzas de empotramiento perfecto se analizará el elemento de la Figura 16 con carga distribuida en dirección de su eje longitudinal.

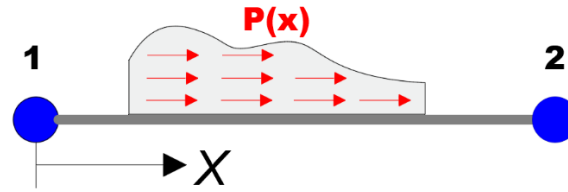


Figura 16: Fuerza No-Nodales en elemento.

Por medio del principio de superposición, la estructura de la Figura 16 se puede descomponerse en dos estados de carga (Figura 17), que se estudian por separado:

Estado 1: Consiste en el sistema de cargas real actuando sobre la estructura en la que se han impedido los movimientos de los nodos por medio de empotramientos (Figura 17b). A este estado se le llama “empotramiento perfecto”, y bajo estas condiciones, cada elemento puede estudiarse por separado, determinándose las reacciones en los nodos también conocidas como fuerzas de empotramiento (F_{emp}) (E. Blanco et al., 2015).

Estado 2: Consiste en aplicar sobre la estructura real las fuerzas de empotramiento obtenidas en el Estado 1 pero cambiadas de signos (Figura 17c), (E. Blanco et al., 2015). Estas fuerzas cambiadas de signo pasan a llamarse fuerzas equivalentes (F_{eq}).

El Estado 1 se determina utilizando métodos tradicionales, lo que refleja son las fuerzas en los nodos (F_{emp}) necesarias para mantener los desplazamientos en cero.

El Estado 2 refleja las fuerzas en los nodos (F_{eq}) que generan desplazamientos iguales a la fuerza no-nodal analizada.

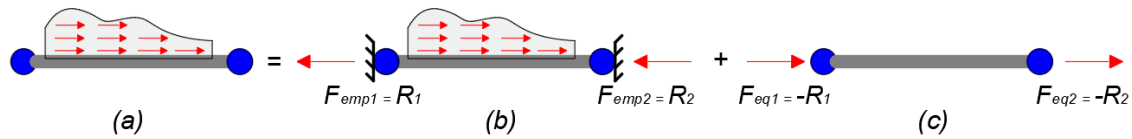


Figura 17: (a) Elemento original, (b) Estado 1, (c) Estado 2.

Por medio del método de las fuerzas de empotramiento se ha transformado la carga no-nodal en fuerza nodal. Para incorporar estas fuerzas en el análisis matricial se debe sumar las fuerzas equivalentes al vector de fuerzas elementales de la Ecuación 4. Para aislar las fuerzas en elementos desconocidas despejamos las fuerzas equivalentes y obtenemos la relación *Fuerza-Desplazamiento* modificada como se muestra en la Ecuación 13. Para la barra analizada, la relación *Fuerza-Desplazamiento* modificada es la siguiente:

$$\{F\} = [K]\{u\} + \{F_{emp}\}$$

Ecuación 13: Relación Fuerza-Desplazamiento modificada.

Donde:

- $\{F\}$: Vector de cargas externas
- $[K]$: Matriz de rigidez de la estructura
- $\{u\}$: Vector de desplazamientos en los nodos
- $\{F_{emp}\}$: Vector de fuerzas de empotramiento

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

Se considera el siguiente caso particular de carga no-nodal para ilustrar la resolución de las fuerzas de empotramiento perfecto.

Carga Axial Distribuida: Esta carga está distribuida a lo largo de toda la barra como se observa en la Figura 18.

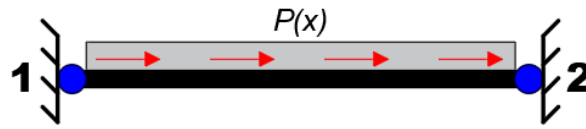


Figura 18: Barra en 1D doblemente empotrada con carga axial distribuida.

Se puede utilizar los métodos tradicionales para obtener las reacciones (fuerzas de empotramiento), en este caso se utiliza el método de cortes y ecuaciones de resistencia de materiales.

Se inicia con el diagrama de cuerpo libre (Figura 19). Solo se considera las reacciones axiales, ya que este elemento trabaja solo de forma axial.

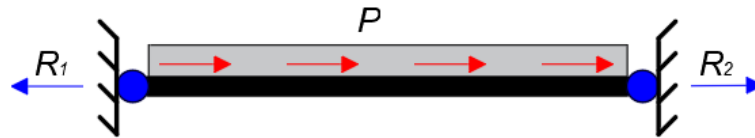


Figura 19: Diagrama de cuerpo libre barra en 1D con carga uniforme axial.

Luego se realiza un corte en el interior del elemento (Figura 20), y se coloca la fuerza axial (A) que se genera internamente en el elemento

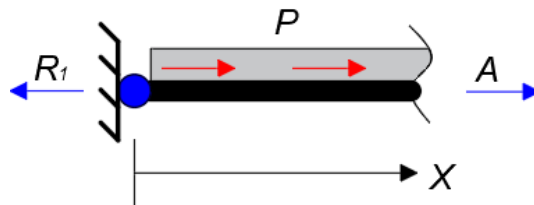


Figura 20: Corte en elemento.

Se procede con el equilibrio de fuerzas en el elemento seccionado

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A + (P \cdot x) - R_1 = 0 \rightarrow A = -P \cdot x + R_1$$

Al introducir la Ecuación 1 y la Ecuación 2 en la Ley de Hooke (Ecuación 3), se obtiene la deformación total en el elemento (Ecuación 14).

$$\delta = \frac{A L}{E A_T}$$

Ecuación 14: Deformación por Carga Axial.

Para analizar la deformación total en el elemento se realiza la integral recorriendo x en toda la longitud del elemento, debido a que la deformación total al final del elemento es cero por el empotramiento que lo restringe, se consigue el valor de la reacción izquierda.

$$\delta = \int_0^L \frac{(-P \cdot x + R_1)}{E A_T} dx \rightarrow 0 = \frac{\left(-P \cdot \frac{L^2}{2} + R_1 \cdot L\right)}{E A_T}$$

$$R_1 = \frac{P \cdot L}{2}$$

Se procede con el equilibrio de fuerzas en toda la estructura (Figura 19), con lo que se encuentra la reacción faltante.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow (P \cdot L) - R_1 + R_2 = 0 \rightarrow R_2 = -(P \cdot L) + R_1$$
$$R_2 = -\frac{P \cdot L}{2}$$

Las fuerzas de empotramiento en el elemento al considerar el sentido de aplicación son:

$$\{F_{emp}\} = \begin{pmatrix} -\frac{P \cdot L}{2} \\ -\frac{P \cdot L}{2} \end{pmatrix}$$

Para la barra en 1D, la relación Fuerza-Desplazamiento modificada ante carga distribuida axial en todo el elemento es la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{P \cdot L}{2} \\ -\frac{P \cdot L}{2} \end{Bmatrix}$$

3.1.8. Cambios de Temperatura

En elementos sometidos a temperaturas elevadas deben incluirse efectos térmicos en el análisis, debido a que están relacionadas a las ecuaciones de esfuerzo-deformación. La dilatación del elemento depende principalmente del coeficiente de expansión térmica del material. Para materiales isotrópicos y homogéneos, este coeficiente es independiente de la dirección y posición del elemento, aunque puede depender de la temperatura (Tena, 2007).

Los efectos de temperatura afectan exclusivamente a esfuerzos y deformaciones axiales, y además es posible que se generen momentos cuando el gradiente de temperatura no es uniforme a través de la sección transversal del elemento (Tena, 2007). El efecto a momento, generado por cambios de temperatura se analizar posteriormente en la sección de vigas.

Cuando se produce un cambio de temperatura en un elemento barra, se produce una deformación axial linealmente proporcional a este cambio de temperatura, para agregar el efecto de temperatura en el análisis matricial se puede utilizar la misma metodología que en fuerza no-nodales (Sennett, 1994).

Para determinar las fuerzas de empotramiento hay que tener en cuenta la variación de temperatura. Si la variación de temperatura es positiva, el elemento se dilata y las fuerzas de empotramiento están a compresión, mientras que, si la variación de temperatura es negativa, el elemento se contrae y las fuerzas de empotramiento están a tracción. Por medio de la ley de Hooke, ecuaciones de resistencia de materiales y la ecuación de deformación unitaria por temperatura (Ecuación 15) se obtienen las fuerzas de empotramiento.

$$\varepsilon_T = \alpha \cdot (\Delta T)$$

Ecuación 15: Deformación Unitaria por Temperatura.

Donde:

ε_T : Deformación unitaria por temperatura

α : Coeficiente de expansión térmica

ΔT : Variación de Temperatura

Para determinar las fuerzas de empotramiento por temperatura se introduce la Ecuación 1 y la Ecuación 15 en la Ley de Hooke (Ecuación 3), y se obtiene:

$$\{F_{emp}\} = E A \alpha (\Delta T) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 16: Fuerzas de empotramiento por cambio de temperatura en barras en 1D.

Donde:

F_{emp} : Fuerzas de empotramiento

α : Coeficiente de expansión térmica

E : Módulo de elasticidad

ΔT : Variación de Temperatura

A : Área Transversal de la sección

Para la barra en 1D, la relación *Fuerza-Desplazamiento* generalizada con efecto de temperatura es la siguiente:

$$\begin{aligned} \{F\} &= [K]\{u\} + \{F_{emp}\} \\ \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E A \alpha (\Delta T) \\ -E A \alpha (\Delta T) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

3.1.9. Errores de Fabricación

En el análisis estructural, un error de fabricación se refiere a una pequeña deformación inicial de un miembro en su estado no esforzado (Kassimali, 2012).

En la construcción, los cimientos (apoyos) son ubicados en un espacio determinado por la longitud del elemento apoyado, sin embargo, si el elemento se fabricó de una mayor longitud será necesario ajustarlo, lo que produce esfuerzos internos en el mismo, como se ilustra en la Figura 21. Los problemas de ajuste por contracción, las vigas de hormigón pretensado y los puentes atirantados, son otros ejemplos de estructuras pre-esforzadas (McGuire et al., 2014).

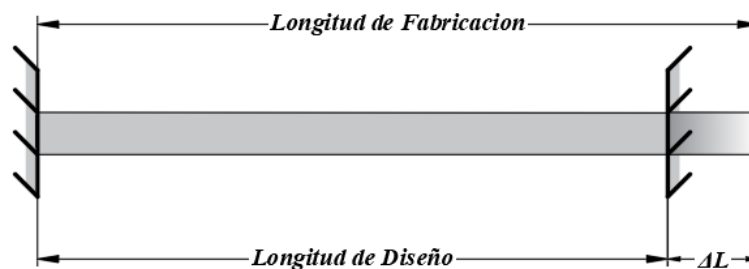


Figura 21: Error de fabricación en un elemento (McGuire et al., 2014).

Este efecto en el análisis matricial se puede aplicar con la misma metodología que en fuerza no-nodales. Para determinar las fuerzas de empotramiento hay que tener en cuenta la variación de longitud. Si la variación de longitud es positiva, el elemento es más largo y las fuerzas de empotramiento están a compresión, mientras que, si la variación de longitud es negativa, el elemento es más corto y las fuerzas de empotramiento están a tracción.

Las fuerzas de empotramiento se determinan por medio de la ley de Hooke y las ecuaciones de resistencia de materiales, estas fuerzas fueron determinadas en la Ecuación 14, donde la deformación total (δ) se

reemplaza por el error de fabricación (ΔL) y se la deja en función de la fuerza normal (F_{emp}). Las fuerzas de empotramiento son:

$$\{F_{emp}\} = \frac{E A \Delta L}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 17: Fuerzas de empotramiento por errores de fabricación en barras en 1D.

Donde:

F_{emp} : Fuerzas de empotramiento

ΔL : Error de fabricación

E : Módulo de elasticidad

L : Longitud del elemento

A : Área Transversal de la sección

Para la barra en 1D, la relación *Fuerza-Desplazamiento* generalizada con errores de fabricación es la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} F \\ F \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{emp} \\ F_{emp} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{E A \Delta L}{L} \\ -\frac{E A \Delta L}{L} \end{Bmatrix}$$

3.2. Armaduras en 2D

En esta sección se analizará el elemento estructural tipo armadura en 2D, también conocido como barra en 2D puesto que está sometido a tensión axial igual que la barra en 1D, la diferencia es que cada nodo de este elemento tiene dos GDL (4 GDL por elemento), el mismo que corresponde a una traslación paralela y a una perpendicular en la dirección longitudinal de la barra.

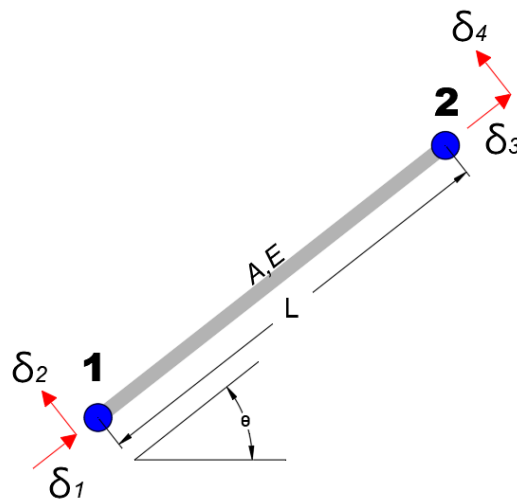


Figura 22: Elemento Armadura en 2D.

3.2.1. Matriz de Rigidez Elemental

Los elementos armadura son rectos y conectados entre sí por articulaciones, esto hace que los elementos admitan y transfiera cargas axiales. A diferencia del elemento barra en 1D estos elementos puede esta rotados a cierto ángulo, pero como la relación *Fuerza-Desplazamiento* elemental se analiza en ejes locales esta termina siendo la misma que la de una barra en 1D. Para obtener la relación *Fuerza-Desplazamiento* general se requiere transformar todas las relaciones *Fuerza-Desplazamiento* elementales a un sistema de coordenadas global, por esta razón, se añade otro GDL traslacional a la relación *Fuerza-Desplazamiento* elemental.

La relación *Fuerza-Desplazamiento* elemental para armaduras en ejes locales al añadir los 2 GDL adicionales es la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 18: Relación Fuerza-Desplazamiento desarrollada para elemento Armaduras en 2D.

3.2.2. Transformación de Coordenadas

En el análisis estructural existen 2 diferentes sistemas de coordenadas para fuerzas y desplazamientos, uno llamado local, para referenciar cada elemento que forma parte de un sistema estructural, y otro global, para referenciar el sistema estructural en su totalidad (Rojas & Padilla, 2009).

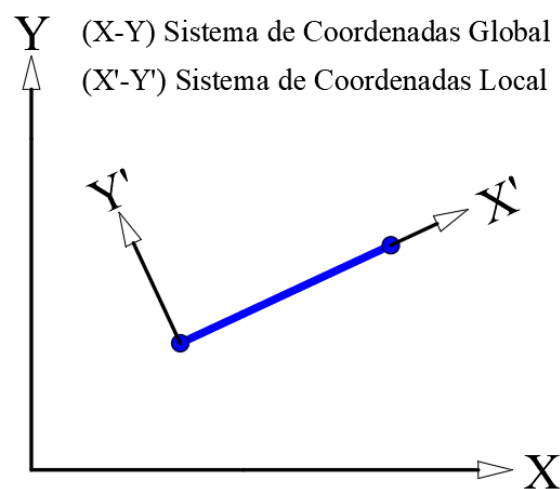


Figura 23: Sistema de Coordenadas.

Sistema de Coordenadas Locales

Se utilizará un sistema de coordenadas local ($X' - Y'$) para cada elemento y se indicará las fuerzas en elementos (P) y los desplazamientos correspondientes (δ) en la dirección del elemento (Nagarajan, 2019).

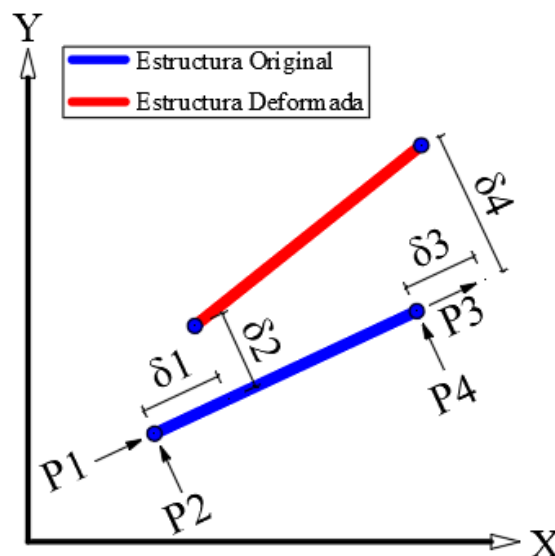


Figura 24: Sistema de Coordenadas Locales.

Sistema de Coordenada Global

Se utiliza un único sistema de coordenadas global ($X - Y$) para la estructura en su totalidad y especificar las fuerzas (F) y desplazamientos (u) en los nodos de la estructura (Nagarajan, 2019).

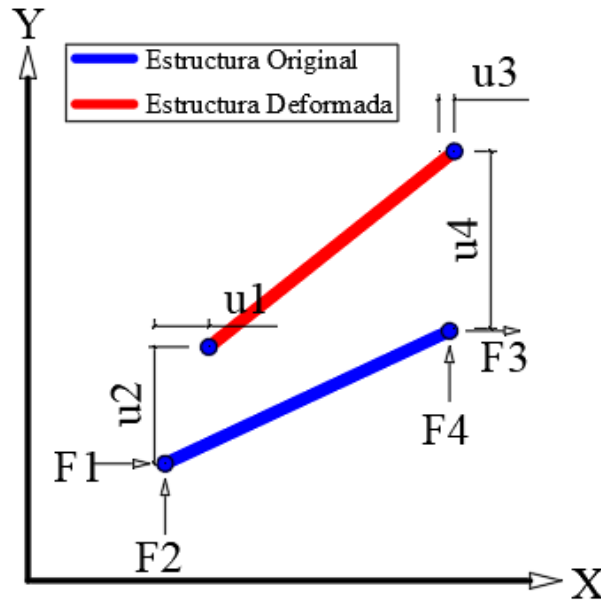


Figura 25: Sistema de Coordenadas Globales

Para obtener la relación *Fuerza-Desplazamiento* general, se debe transformar los componentes de las relaciones elementales a un sistema global.

Desplazamientos Locales (δ)	→	Desplazamientos Globales (u)
Fuerzas Locales (P)	→	Fuerzas Globales (F)
Matrices Locales (k_L)	→	Matrices Globales (k_G)

Igualando el sistema de coordenadas locales al sistema de coordenadas globales, se pueden encontrar relaciones para transformar los diferentes componentes. Descomponiendo las fuerzas F en fuerzas P como se muestra en la Figura 26, se deduce:

$$P_1 = F_1 \cos(\theta) + F_2 \sin(\theta)$$

$$P_2 = -F_1 \sin(\theta) + F_2 \cos(\theta)$$

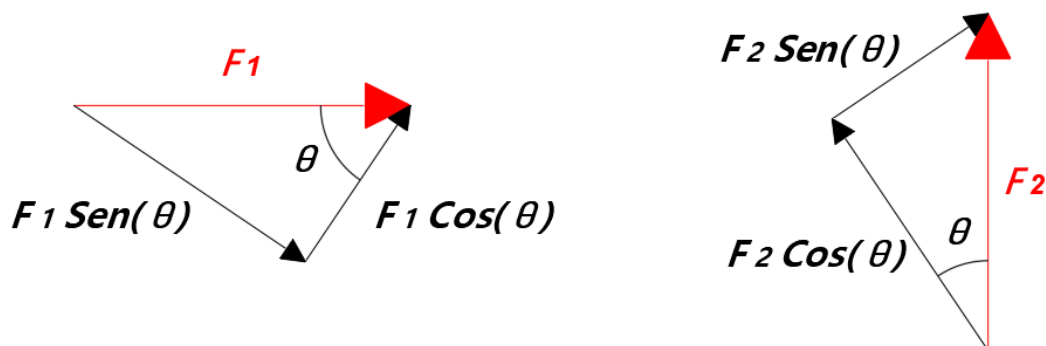


Figura 26: Transformación de Fuerzas.

Para las fuerzas del nodo final se determina las fuerzas P de forma similar y se obtiene:

$$P_3 = F_3 \cos(\theta) + F_3 \sin(\theta)$$

$$P_4 = -F_4 \text{Sen}(\theta) + F_4 \text{Cos}(\theta)$$

Al expresarlo de forma matricial las ecuaciones anteriores se obtiene la matriz de transformación β que se muestra en la Ecuación 19.

$$\beta = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\theta) & \text{Sen}(\theta) & 0 & 0 \\ -\text{Sen}(\theta) & \text{Cos}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Cos}(\theta) & \text{Sen}(\theta) \\ 0 & 0 & -\text{Sen}(\theta) & \text{Cos}(\theta) \end{bmatrix}$$

Ecuación 19: Matriz de Transformación.

La matriz β tiene la propiedad de ortogonalidad, es decir, su inversa es igual a su transpuesta como se muestra en la Ecuación 20.

$$[\beta]^T = [\beta]^{-1}$$

Ecuación 20: Matriz de Transformación Transpuesta.

Con la matriz β se puede transformar los vectores de fuerzas y desplazamientos.

$$\{P\} = [\beta] \{F\} \rightarrow \{F\} = [\beta]^T \{P\}$$

Ecuación 21: Transformación de Fuerzas.

Donde:

- $\{P\}$: Vector de fuerzas locales
- $\{\beta\}$: Matriz de transformación
- $\{F\}$: Vector de fuerzas globales

$$\{\delta\} = [\beta] \{u\} \rightarrow \{u\} = [\beta]^T \{\delta\}$$

Ecuación 22: Transformación de Desplazamientos.

Donde:

- $\{\delta\}$: Vector de desplazamientos locales
- $\{\beta\}$: Matriz de transformación
- $\{u\}$: Vector de desplazamientos globales

Para transformar las matrices de rigideces elementales a un sistema de coordenadas globales, se utiliza operaciones matriciales como se expone a continuación.

En la relación *Fuerza-Desplazamiento* elemental en coordenadas locales

$$\{P\} = [k_L] \{\delta\}$$

Se introduce la Ecuación 21 y Ecuación 22

$$[\beta] \{F\} = [k_L] [\beta] \{u\}$$

Al separar el vector de fuerzas globales se obtiene

$$\{F\} = [\beta]^{-1} [k_L] [\beta] \{u\}$$

Al reemplazar la Ecuación 23 se consigue

$$\{F\} = [\beta]^T [k_L] [\beta] \{u\}$$

Al asociar los 3 primeros términos de lado derecho de la ecuación anterior se obtiene la relación *Fuerza-Desplazamiento* en coordenadas globales como se muestra en la Ecuación 23.

$$[k_G] = [\beta]^T [k_L] [\beta]$$

Ecuación 23: Transformación de Matriz de Rigidez Elemental.

Con los componentes de la relación Fuerza-Desplazamientos elementales transformados se puede hacer la combinación de rigideces igual que en los elementos barras en 1D, esto se detalla en la sección 3.1.3.

3.2.3. Efectos en Armaduras en 2D

Las cargas no-nodales en armaduras como cargas distribuidas o puntuales en dirección axial se tratan igual que en barras en 1D, por medio de las fuerzas de empotramiento (Sección 3.1.7). En estas estructuras también se puede dar los desplazamientos iniciales en apoyos, errores de fabricación y cambios de temperatura, los mismos que son tratados de las siguientes secciones.

3.2.3.1. Desplazamientos Iniciales en Apoyos

Estos desplazamientos se trabajan igual que en barras en 1D, ya que son desplazamientos conocidos y pertenecen a los *GDLs*, pero hay que tener en cuenta que la partición de la relación *Fuerza-Desplazamiento* general va a estar en coordenadas globales. Por lo general estos desplazamientos están en coordenadas globales, caso contrario se transforman por medio de la Ecuación 22. Para incorporar estos desplazamientos en el análisis matricial, se los debe reemplazar en el subvector $\{u_s\}$ de la Ecuación 11, la posición dentro del vector corresponde a su GDL (J. Blanco et al., 2012).

3.2.3.2. Errores de Fabricación y Cambios de Temperatura

Al igual que las barras en 1D los cambios de temperatura y errores de fabricación se maneja con los conceptos de fuerzas de empotramiento, donde las cargas axiales aplicadas en el elemento se transforman a cargas nodales.

Las fuerzas de empotramiento por cambios de temperatura y errores de fabricación en ejes locales son las siguiente:

$$\{F_{emp}\} = E A \alpha (\Delta T) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 24: Fuerzas de empotramiento por cambios de temperatura en Armaduras 2D.

$$\{F_{emp}\} = \frac{E A \Delta L}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 25: Fuerzas de empotramiento por errores de fabricación en Armaduras 2D.

Como se puede observar las ecuaciones anteriores son similares a las de la barra en 1D, la diferencia es el GDL añadido por la traslación en dirección perpendicular al elemento.

Dado que la relación *Fuerza-Desplazamiento* general va a estar en ejes globales, se requiere transformar las fuerzas de empotramiento locales a globales, esto se realiza por medio de la Ecuación 21. Las fuerzas de empotramiento transformada a globales se añaden a la relación Fuerza-Desplazamiento elemental en ejes globales y posteriormente se realiza la combinación de rigideces y resolución del sistema de ecuaciones.

3.2.4. Proceso para Análisis Lineal de Armaduras en 2D

El objetivo es determinar los esfuerzos axiales en los elementos, los desplazamientos en diferentes puntos de la estructura y las reacciones en los apoyos. Este proceso se realiza con la metodología antes explicada, el mismo que se describe en los siguientes pasos:

Paso 1: Información y cálculos iniciales

Para iniciar con el análisis lineal se requiere:

- a. Conocer la información de los nodos, esto se puede realizar con una tabla (tabla de nodos) que presente la siguiente información:
 - Numeración de nodos.
 - Coordenadas de nodos.
 - Fuerzas aplicadas en los nodos.
- b. Conocer la información de los elementos, esto se puede realizar con una tabla (tabla de conectividad) que presente la siguiente información:
 - Numeración de elementos.
 - Numeración del nodo inicial.
 - Numeración del nodo final.
 - Información del material.
 - Información de la sección.
 - Calcular longitud y ángulo del elemento con respecto a la horizontal.

Paso 2: Obtener matrices de Rigideces Elementales Globales $[k_G]$

Por medio de la Ecuación 18 se calcula la matriz de rigidez elemental en coordenadas locales, como el objetivo es el análisis de la estructura en su totalidad la relación *Fuerza-Desplazamiento* general se empleará en coordenadas globales, por consiguiente, la matriz de rigidez elemental debe ser transformada a este sistema. La transformación de la matriz se lo realiza mediante la Ecuación 23.

Paso 3: Matriz de rigidez general $[K]$

Con el proceso de combinación de rigideces mostrado en la sección 3.1.3, se combinan las matrices de rigidez elementales en coordenadas globales, con lo que se obtiene la matriz de rigidez de la relación *Fuerza-Desplazamiento* general.

Paso 4: Obtener vector de fuerzas externas $\{F\}$

Para la relación *Fuerza-Desplazamiento* general se requiere el vector de fuerzas externas, a este vector se debe incorporar las fuerzas aplicadas y las reacciones en la estructura, las mismas que debe estar en coordenadas globales.

Las fuerzas aplicadas se pueden clasificar en 2 tipos:

- **Fuerzas Nodales:** Estas fuerzas aplicadas en los nodos se agregan directamente al $\{F\}$ en la posición correspondiente al GDL. Estas fuerzas nodales deben estar en coordenadas globales, caso contrario deben ser transformadas con la Ecuación 21.
- **Fuerzas No-Nodales:** Estas fuerzas aplicadas a lo largo del elemento pueden ser: cargas puntuales, distribuidas, efectos de temperatura o errores de fabricación. Para incorporar estas cargas en el $\{F\}$, se debe aplicar el método de las fuerzas de empotramiento perfecto que se detalló en la sección 3.1.7, posteriormente estas fuerzas se transforman a coordenadas globales con la Ecuación 21 y se incorporan al $\{F\}$.

Las reacciones se incorporan como incógnitas en el $\{F\}$.

Paso 5: Obtener vector de desplazamientos general $\{u\}$

Para la relación *Fuerza-Desplazamiento* general se requiere el vector de desplazamiento general, a este vector se debe incorporar los desplazamientos conocidos (apoyos y desplazamientos iniciales) en los GDL restringidos y los desplazamientos desconocidos en los GDL libres. Los desplazamientos deben estar en coordenadas globales, la transformación de coordenadas se lo realiza mediante la Ecuación 22.

Paso 6: Realizar partición de la matriz de rigidez general

Con los resultados obtenidos en los pasos 3, 4 y 5 se arma la relación *Fuerza-Desplazamiento* general. Por medio del método de la partición detallado en la sección 3.1.4, se obtiene las ecuaciones para determinar los desplazamientos desconocidos y reacciones.

Paso 7: Calcular los subvectores de desplazamientos $\{u_p\}$ y reacciones $\{f_s\}$

Como se tiene totalmente definidos los componentes de la Ecuación 11, se obtiene los desplazamientos desconocidos, posteriormente, con estos resultados se puede resolver la Ecuación 12 y encontrar las reacciones en los nodos.

Paso 8: Calcular las fuerzas elementales

Al tener definido todos los desplazamientos nodales en la estructura, se puede calcular las fuerzas en los elementos por medio de la relación *Fuerza-Desplazamiento* elemental, se debe tener en cuenta las fuerzas no-nodales al igual que en el paso 4. Dependiendo del sistema de coordenadas que se requiera en las fuerzas elementales, se realiza la transformación por medio de la Ecuación 21.

3.2.5. Proceso para Análisis No-Lineal en Armaduras en 2D

Los problemas estructurales que superan el límite elástico deben ser tratados por medio de un análisis no-lineal. Para realizar el análisis no-lineal se puede ocupar el método por eventos o por incrementos. En el trabajo desarrollado se define totalmente la zona de crecimiento de la curva del comportamiento no-lineal (Pushover), para este caso resulta más eficiente utilizar el método por eventos.

3.2.5.1. Método de Carga Unitaria por Eventos

Este proceso realiza iteraciones de cargas unitarias incrementales, en cada iteración se encuentra la carga y desplazamiento que hace fluir algún elemento. Según (Flores, 2018), este procedimiento se describe en los siguientes pasos:

Paso 1: Información y cálculos iniciales. Para iniciar con el análisis no-lineal se requiere:

- a. Conocer la información de los nodos, esto se puede realizar con una tabla (tabla de nodos) que presente la siguiente información:
 - Numeración de nodos.
 - Coordenadas de nodos.
 - Fuerzas aplicadas en los nodos.
- b. Conocer la información de los elementos, esto se puede realizar con una tabla (tabla de conectividad) que presente la siguiente información:
 - Numeración de elementos.
 - Numeración del nodo inicial.
 - Numeración del nodo final.
 - Información del material.

- Información de la sección.
 - Calcular longitud y ángulo del elemento con respecto a la horizontal.
- c. Determinar GDL libre al cual se desea aplicar la carga unitaria incremental (GDL de control).
- d. Calcular la fuerza de fluencia en cada elemento, esto se determina por medio de la Ecuación 26.

$$P_y = F_y \times A$$

Ecuación 26: Fuerza de fluencia.

Donde:

P_y : Fuerza de fluencia

F_y : Esfuerzo de fluencia

A : Área de la sección transversal

Paso 2: Partición de la matriz

Se calculan las relaciones *Fuerza-Desplazamiento* elementales, luego se realiza la combinación de rigideces y se finaliza con la partición de la matriz de rigidez (Ecuación 8). Este paso se lo realiza en su totalidad como un análisis lineal.

Paso 3: Determinar el subvector de fuerzas $\{F_p\}$

Como solo existe una fuerza unitaria aplicada en la estructura, el vector F_p es nulo excepto en GDL de control, en este grado de libertad la fuerza es la unidad.

Paso 4: Calcular el subvector de desplazamiento $\{u_p\}$

Como se tiene totalmente definidos los componentes de la Ecuación 11, se obtiene los desplazamientos desconocidos en coordenadas globales.

Paso 5: Calcular las fuerzas elementales

Una vez obtenido todos los desplazamientos y las matrices de rigidez elementales, se determina las fuerzas en los elementos por medio de la relación *Fuerza-Desplazamiento* elemental (Ecuación 18). Teniendo en cuenta que la fuerza de fluencia actuante en el elemento se encuentra en coordenadas locales, se requiere transformar las fuerzas elementales a este sistema, esto se realiza por medio de la Ecuación 21.

Paso 6: Calcular la fuerza en la estructura que hacen fluir a los elementos

Al tener una única fuerza unitaria aplicada en la estructura, las fuerzas elementales son de naturaleza unitaria, entonces, si se desea obtener la fuerza aplicada a la estructura que hace que el elemento fluya se obtiene la siguiente ecuación:

$$F_{est} = \frac{P_y}{F_{ele}}$$

Ecuación 27: Fuerza en la estructura para fluencia de elementos.

Donde:

F_{est} : Fuerza en la estructura

P_y : Fuerza de fluencia del elemento

F_{ele} : Fuerza unitaria en el elemento

Por medio de la Ecuación 27 se calcula la fuerza aplicada en la estructura que hace fluir a cada elemento, la menor de estas corresponde a la fuerza en la estructura (F_{est}) que próximamente hará fluir a un elemento.

La curva Pushover está en función de la fuerza y el desplazamiento (Fuerza vs Desplazamiento), esta fuerza corresponde a F_{est} y el desplazamiento corresponde al generado en el GDL de control por F_{est} .

Paso 7: Calcular el desplazamiento en el GDL de control generado por F_{est}

Con la F_{est} que hace fluir al elemento más próximo, se calcula el desplazamiento en el GDL de control (u_{est}), esto se lo realiza como en el paso 3 y 4. En el paso 3 varia que la carga unitaria es reemplazada por F_{est} .

Paso 8: Graficar Curva Pushover

Con la fuerza obtenida en el paso 6 (F_{est}) y el desplazamiento obtenido en el paso 7 (u_{est}) se grafica el siguiente punto de la curva Pushover de la estructura analizada.

Paso 9: Modificar módulo de elasticidad en el elemento que fluyó

Al realizar el análisis no-lineal con los pasos anteriores, se determina la carga y el desplazamiento a la que fluye el elemento más débil. Este elemento al fluir cambia su módulo de elasticidad del rango lineal (E) al no-lineal (E_p) como se muestra en la Figura 2, lo que implica que la rigidez del elemento se modifica, por ende, la relación *Fuerza-Desplazamiento* general es distinta a la anteriormente analizada.

Paso 10: Siguiendo interacción

Para determinar el siguiente punto de la curva Pushover, se realiza los pasos del 2 al 9, teniendo en cuenta que la rigidez del elemento que fluyó anteriormente fue modificada. Este proceso iterativo continua hasta que todos los elementos de la armadura hayan fluido.

3.3. Vigas en 2D

Las vigas son estructuras rectas, generalmente de longitud considerable, que están soportadas y cargadas de tal manera que todas las fuerzas y momentos que actúan sobre ella se encuentran en un plano de simetría de su sección transversal (Kassimali, 2012). A diferencia del elemento armadura, las vigas y pórticos proveen rigidez flexional.

Para la aplicación del método de los desplazamientos, se representa a la estructura mediante un modelo analítico de acuerdo con la identificación de nodos y elementos. En cada extremo de un elemento viga se ubica un nodo el cual tiene dos GDL, un desplazamiento traslacional perpendicular al eje longitudinal del elemento y otro desplazamiento rotacional (u_1 , u_2 , u_3 y u_4), como se observa en la Figura 27. Las fuerzas aplicadas en cada nodo son fuerzas cortantes y momentos (F_1 , F_2 , F_3 y F_4), y van acorde a la ubicación y sentido de los desplazamientos (Hibbeler, 2012).

Un elemento viga esta referenciado en un sistema de coordenadas, el cual consta de dos ejes: primero por un eje longitudinal (normalmente eje 'X'), y segundo por un eje transversal ubicado en el extremo inicial (normalmente eje 'Y'). Observe que las fuerzas cortantes son positivas porque actúan en la misma dirección del eje 'Y', y los momentos son positivos porque según la convección de signos el sentido antihorario es positivo.

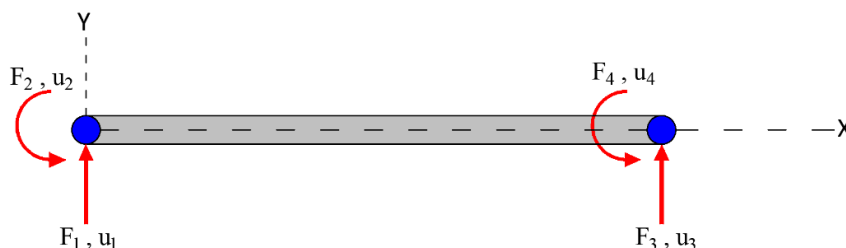


Figura 27: GDL de un elemento viga.

3.3.1. Matriz de Rigidez Elemental

Al igual que en barras, la relación *Fuerza-Desplazamiento* (Ecuación 4) puede expandirse a un elemento viga, en este caso se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones lineales, dado que un elemento viga posee cuatro GDL.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 28: Relación Fuerza-Desplazamiento elemental para una viga en 2D.

Es importante indicar que, una viga tiene una orientación horizontal y las fuerzas aplicadas sobre ella se alinean al sistema de coordenadas utilizado para referenciarla, por lo tanto, la relación *Fuerza-Desplazamiento* en coordenadas locales es la misma que en coordenadas globales.

Se considera un elemento viga de sección contante para determinar las relaciones de rigidez, el cual se observa en la Figura 28. Cuando en la viga se aplica cargas externas, el elemento se deforma y surgen fuerzas internas (cortante y momento) en sus extremos. La posición inicial y deformada están representadas en la Figura 28. La configuración deformada puede ser definida mediante cuatro desplazamientos (cuatro GDL). Se puede considerar cada desplazamiento como un efecto por separado y luego realizar la superposición de todos ellos. Para cada desplazamiento se producen un conjunto de fuerzas necesarias para producir tal deformación (Flores, 2018)

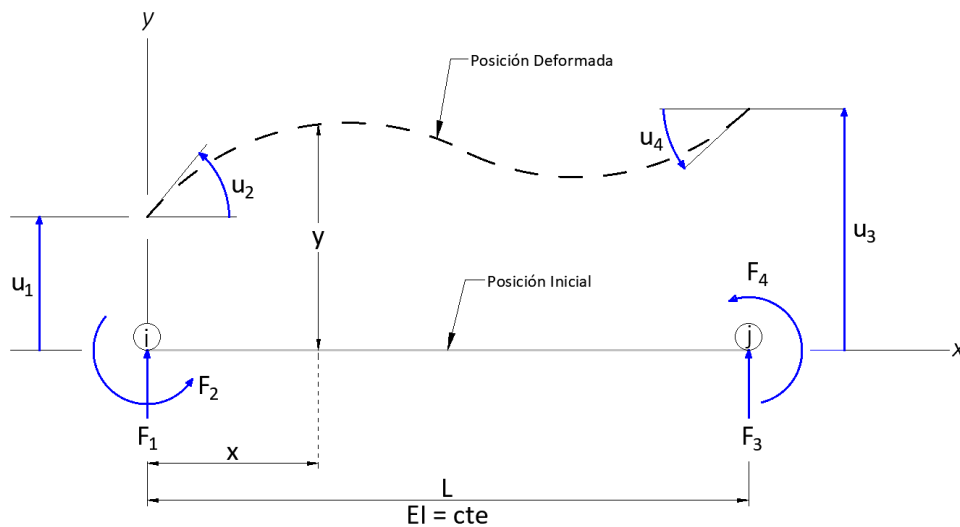


Figura 28: Posición inicial y deformada de un elemento viga (Kassimali, 2012).

Con la ecuación diferencial para la deflexión de las vigas (Ecuación 29), se deriva relaciones de rigidez al integrarla directamente, considerando que la rigidez flexional EI es constante.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Ecuación 29: Curva elástica de vigas.

Para determinar la configuración de la deformada se analiza los siguientes cuatro casos:

Caso Uno: Consiste en someter al elemento un desplazamiento unitario en el GDL u_1 en el extremo inicial, como se muestra en la Figura 29. Con lo cual surgen las fuerzas cortantes k_{11} y k_{31} , y los

momentos flectores k_{21} y k_{41} . Para determinar el valor de estos coeficientes se resuelve la Ecuación 29, por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación del momento flector:

$$M = -k_{21} + k_{11} \cdot x$$

Ecuación 30: Ecuación de momento para el caso uno.

Reemplazando la Ecuación 30 en la Ecuación 29 e integrando se obtiene la ecuación de la pendiente de la curva elástica:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left(-k_{21} \cdot x + k_{11} \cdot \frac{x^2}{2} \right) + c_1$$

Ecuación 31: Ecuación de pendiente para el caso uno.

Y una vez más, integrando la Ecuación 31 se obtiene la ecuación de la deflexión:

$$y = \frac{1}{EI} \left(-k_{21} \cdot \frac{x^2}{2} + k_{11} \cdot \frac{x^3}{6} \right) + c_1 \cdot x + c_2$$

Ecuación 32: Ecuación de la deflexión para el caso uno.

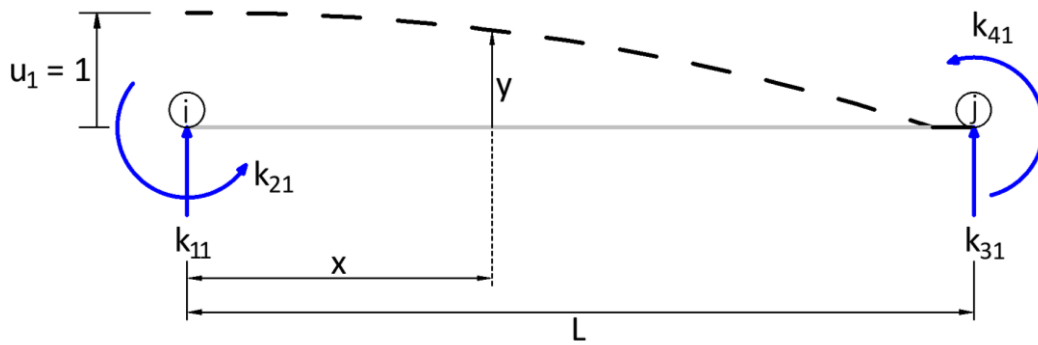


Figura 29: Desplazamiento unitario en el GDL u_1 .

Las incógnitas pueden ser determinadas al aplicar las siguientes condiciones de contorno:

$$x = 0, \quad \theta = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$x = 0, \quad y = u_1 = 1 \rightarrow c_2 = 1$$

$$x = L, \quad \theta = 0 \rightarrow 0 = \frac{1}{EI} \left(-k_{21} \cdot L + k_{11} \cdot \frac{L^2}{2} \right)$$

$$x = L, \quad y = u_3 = 0 \rightarrow 0 = \frac{1}{EI} \left(-k_{21} \cdot \frac{L^2}{2} + k_{11} \cdot \frac{L^3}{6} \right) + 1$$

Ecuación 33: Condiciones de contorno para el caso uno.

Resolviendo las dos últimas relaciones, se obtiene el valor de k_{11} y k_{21} .

$$k_{11} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{21} = \frac{6EI}{L^2}$$

Los otros coeficientes de rigidez se determinan mediante condiciones de equilibrio aplicadas al elemento de la Figura 29.

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma F_y &= 0 \quad \frac{12EI}{L^3} + k_{31} = 0 \\
 k_{31} &= -\frac{12EI}{L^3} \\
 +\curvearrowright \Sigma M_e &= 0 \quad \frac{6EI}{L^2} - \frac{12EI}{L^3}(L) + k_{41} = 0 \\
 k_{41} &= \frac{6EI}{L^2}
 \end{aligned}$$

Los coeficientes de rigidez k para el caso uno son los siguientes:

$$k_{11} = \frac{12EI}{L^3} \quad k_{21} = \frac{6EI}{L^2} \quad k_{31} = -\frac{12EI}{L^3} \quad k_{41} = \frac{6EI}{L^2}$$

Ecuación 34: Coeficientes de rigidez para el caso uno.

Caso Dos: Consiste en someter al elemento un desplazamiento unitario en el GDL u_2 en el extremo inicial, como se muestra en la Figura 30. Con lo cual surgen las fuerzas cortantes k_{12} y k_{32} , y los momentos flectores k_{22} y k_{42} . Para determinar el valor de estos coeficientes se resuelve la Ecuación 29, por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación del momento flector:

$$M = -k_{22} + k_{12} \cdot x$$

Ecuación 35: Ecuación de momento para el caso dos.

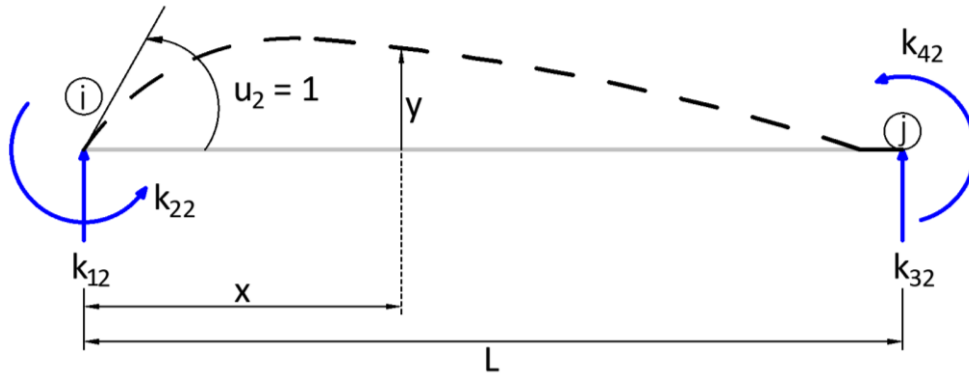


Figura 30: Desplazamiento unitario en el GDL u_2 .

Se realiza un procedimiento similar al caso uno y se obtiene los coeficientes de rigidez.

$$k_{12} = \frac{6EI}{L^2} \quad k_{22} = \frac{4EI}{L} \quad k_{32} = -\frac{6EI}{L^2} \quad k_{42} = \frac{2EI}{L}$$

Ecuación 36: Coeficientes de rigidez para el caso dos.

Caso Tres: Consiste en someter al elemento un desplazamiento unitario en el GDL u_3 en el extremo final, como se muestra en la Figura 31. Con lo cual surgen las fuerzas cortantes k_{13} y k_{33} , y los momentos flectores k_{23} y k_{43} . Para determinar el valor de estos coeficientes se resuelve la Ecuación 29, por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación del momento flector:

$$M = -k_{23} + k_{13} \cdot x$$

Ecuación 37: Ecuación de momento para el caso tres.

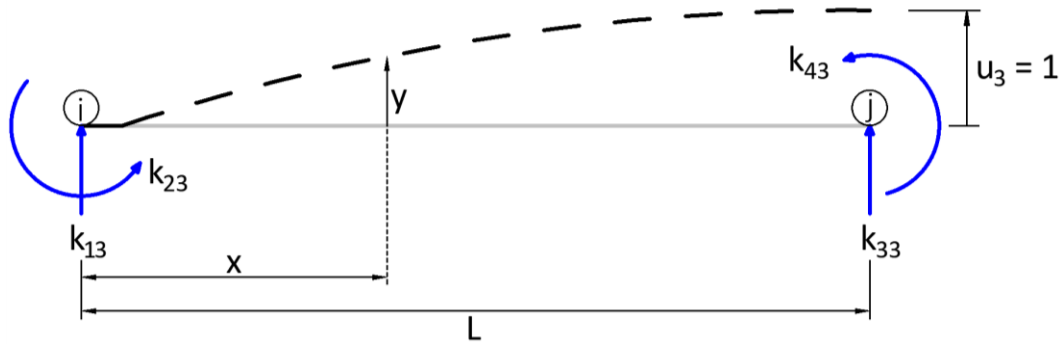


Figura 31: Desplazamiento unitario en el GDL u_3 .

Se realiza un procedimiento similar al caso uno y se obtiene los coeficientes de rigidez.

$$k_{13} = -\frac{12EI}{L^3} \quad k_{23} = -\frac{6EI}{L^2} \quad k_{33} = \frac{12EI}{L^3} \quad k_{43} = -\frac{6EI}{L^2}$$

Ecuación 38: Coeficientes de rigidez para el caso tres.

Caso Cuatro: Consiste en someter al elemento un desplazamiento unitario en el GDL u_4 en el extremo final, como se muestra en la Figura 32. Con lo cual surgen las fuerzas cortantes k_{14} y k_{34} , y los momentos flectores k_{24} y k_{44} . Para determinar el valor de estos coeficientes se resuelve la Ecuación 29, por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación del momento flector:

$$M = -k_{23} + k_{13} \cdot x$$

Ecuación 39: Ecuación de momento para el caso cuatro.

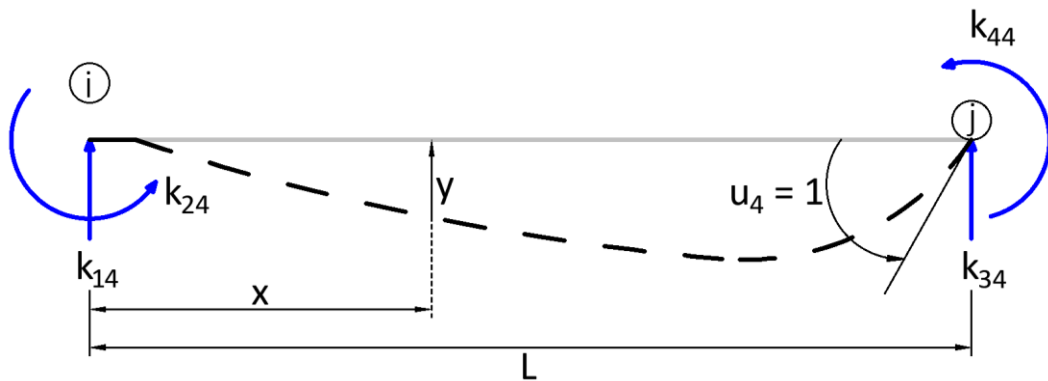


Figura 32: Desplazamiento unitario en el GDL u_4 .

Se realiza un procedimiento similar al caso uno y se obtiene los coeficientes de rigidez.

$$k_{14} = \frac{6EI}{L^2} \quad k_{24} = \frac{2EI}{L} \quad k_{34} = -\frac{6EI}{L^2} \quad k_{44} = \frac{4EI}{L}$$

Ecuación 40: Coeficientes de rigidez para el caso cuatro.

Por superposición de efectos se suman los casos anteriores, las cuatro relaciones de fuerza-desplazamiento resultantes para el elemento viga pueden expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 41: Relación de Fuerza-Desplazamiento para un elemento viga en 2D.

De la Ecuación 41, se puede identificar la matriz de rigidez de un elemento viga como:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Ecuación 42: Matriz de rigidez de un elemento viga en 2D.

3.3.2. Cargas No-Nodales

Como se mencionó en la sección 3.1.6, los elementos pueden estar cargados en su interior. Dado el caso, para que sea factible la aplicación del método de los desplazamientos, se debe usar la Ecuación 13:

$$\{F\} = [K]\{u\} + \{F_{emp}\}$$

Donde el vector $\{F_{emp}\}$ reúne las fuerzas de empotramiento de todos los elementos en coordenadas globales. Estas fuerzas No-Nodales se puede tratar con el método de las fuerzas de empotramiento perfecto, las mismas que se detallan en la sección 3.1.7. Estas fuerzas pueden ser obtenidas combinando el equilibrio del elemento, condiciones de compatibilidad y las relaciones de fuerza-desplazamiento del elemento. En el caso general de elementos inclinados se debe realizar previamente la transformación de coordenadas de las fuerzas de empotramiento perfecto.

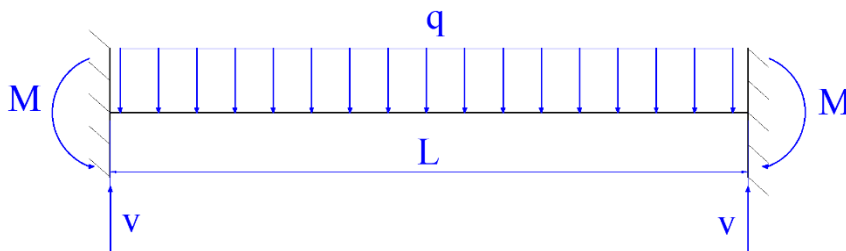


Figura 33: Fuerzas de empotramiento para una viga cargada uniformemente.

Para determinar las fuerzas de empotramiento se considera como ejemplo el caso particular de una viga doblemente empotrada cargada uniformemente en toda su longitud, como se muestra en la Figura 33.

Observe que la viga es simétrica, y por equilibrio de fuerzas verticales se tiene:

$$V = \frac{qL}{2}$$

Para determinar el valor de los momentos es necesario añadir a las ecuaciones de la estática otras relaciones adicionales basadas en la deformación de las vigas, esta relación es la ecuación de la elástica (Ecuación 29).

Existen varios métodos para el estudio de estas vigas, los más usados son: doble integración, área de momentos y superposición de efectos (Singer & Pytel, 1994).

Como se observa en la Ecuación 29, se debe determinar primero la ecuación de momento flector para el caso particular de dicha viga:

$$M(x) = -M + \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

Reemplazando la ecuación de momento en la curva elástica e integrando la misma, se obtiene la relación de la pendiente de la deflexión:

$$EI \frac{dy}{dx} = -Mx + \frac{qL}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + c_1$$

Aplicando las condiciones de contorno se determina el valor de M y c_1 . Se sabe que la pendiente de la deflexión al inicio es cero. Además, a una distancia de la longitud ocurre que la pendiente de la deflexión también es cero. Entonces:

$$x = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$x = L \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow M = \frac{qL^2}{12}$$

3.3.3. Relación Fuerza-Desplazamiento de un Elemento Viga con una Articulación en un Extremo del Elemento

Las conexiones entre elementos viga generalmente transfieren en su totalidad fuerzas cortantes y momentos, pero en algunos casos los miembros pueden estar conectados mediante una articulación, de manera que se transmite fuerza cortante, pero no momento (J. McCormac & Nelson, 2006). Se obtendrá la matriz de rigidez con una articulación para un elemento viga a partir de las relaciones determinadas en la sección anterior.

Para que sea más amplia la aplicación del método de los desplazamientos, se debe usar la Ecuación 13 que incluye las fuerzas de empotramiento perfecto.

Primero, se considera una conexión mediante una articulación en el nodo izquierdo, como se muestra en la Figura 34. Por lo tanto, al considerar las relaciones se tiene en cuenta que el momento en el nodo izquierdo debe ser cero, ($F_2 = 0$), lo que se llega a:

$$F_2 = 0 = \frac{6EI}{L^2}u_1 + \frac{4EI}{L}u_2 - \frac{6EI}{L^2}u_3 + \frac{2EI}{L}u_4 + F_{emp2}$$

Despejando u_2 de la anterior ecuación:

$$u_2 = -\frac{3}{2L}u_1 + \frac{3}{2L}u_3 - \frac{1}{2}u_4 - \frac{L}{4EI}F_{emp2}$$

Esta relación indica que el desplazamiento rotacional u_2 (del extremo articulado del elemento) ya no es un GDL independiente, sino que ahora es una función de los desplazamientos finales u_1 , u_3 y u_4 . Por lo tanto, los GDL independientes necesarios para definir la configuración del elemento deformado, se reducen a tres (Kassimali, 2012).

Para eliminar el GDL u_2 , se sustituye su relación en las demás relaciones mencionadas, como resultado las relaciones modificadas son:

$$F_1 = \frac{12EI}{L^3}u_1 + \frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{3}{2L}u_1 + \frac{3}{2L}u_3 - \frac{1}{2}u_4 - \frac{L}{4EI}F_{emp2}\right) - \frac{12EI}{L^3}u_3 + \frac{6EI}{L^2}u_4 + F_{emp1}$$

$$F_3 = -\frac{12EI}{L^3}u_1 - \frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{3}{2L}u_1 + \frac{3}{2L}u_3 - \frac{1}{2}u_4 - \frac{L}{4EI}F_{emp2}\right) + \frac{12EI}{L^3}u_3 - \frac{6EI}{L^2}u_4 + F_{emp3}$$

$$F_4 = \frac{6EI}{L^2}u_1 + \frac{2EI}{L}\left(-\frac{3}{2L}u_1 + \frac{3}{2L}u_3 - \frac{1}{2}u_4 - \frac{L}{4EI}F_{emp2}\right) - \frac{6EI}{L^2}u_3 + \frac{4EI}{L}u_4 + F_{emp4}$$

Luego de realizar las operaciones algebraicas, las fuerzas F_1 , F_3 , y F_4 , quedarán:

$$F_1 = \frac{3EI}{L^3}u_1 - \frac{3EI}{L^3}u_3 + \frac{3EI}{L^2}u_4 + F_{emp1} - \frac{3}{2L}F_{emp2}$$

$$F_3 = -\frac{3EI}{L^3}u_1 + \frac{3EI}{L^3}u_3 - \frac{3EI}{L^2}u_4 + F_{emp3} + \frac{3}{2L}F_{emp2}$$

$$F_4 = \frac{3EI}{L^2}u_1 - \frac{3EI}{L^2}u_3 + \frac{3EI}{L}u_4 + F_{emp4} - \frac{1}{2}F_{emp2}$$

El anterior sistema de ecuaciones escrito en forma matricial es:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{emp1} - \frac{3}{2L}F_{emp2} \\ 0 \\ F_{emp3} + \frac{3}{2L}F_{emp2} \\ F_{emp4} - \frac{1}{2}F_{emp2} \end{Bmatrix}$$

Ecuación 43: Relación Fuerza-Desplazamiento de un elemento viga con articulación en el extremo izquierdo.

Esta relación *fuerza-desplazamiento* se encuentran en coordenadas locales y modificada para un elemento viga que en su extremo inicial presentan una articulación.

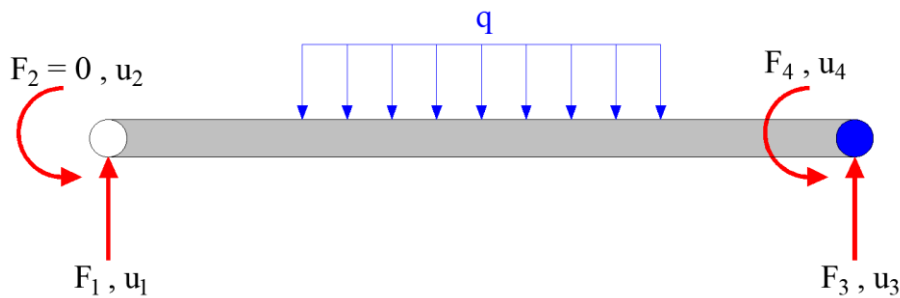


Figura 34: Elemento viga con articulación en el extremo izquierdo.

Ahora si se considera una conexión mediante una articulación en el nodo derecho, como se muestra en la Figura 35. Se puede seguir un procedimiento similar al anterior teniendo en cuenta que el momento en el nodo derecho debe ser cero, ($F_4 = 0$).

La relación *Fuerza-Desplazamiento* para un elemento viga con una articulación en el extremo derecho queda definida en forma matricial así:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{emp1} - \frac{3}{2L} F_{emp4} \\ F_{emp2} - \frac{1}{2} F_{emp4} \\ F_{emp3} + \frac{3}{2L} F_{emp4} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 44: Relación Fuerza-Desplazamiento de un elemento viga con articulación en el extremo derecho.

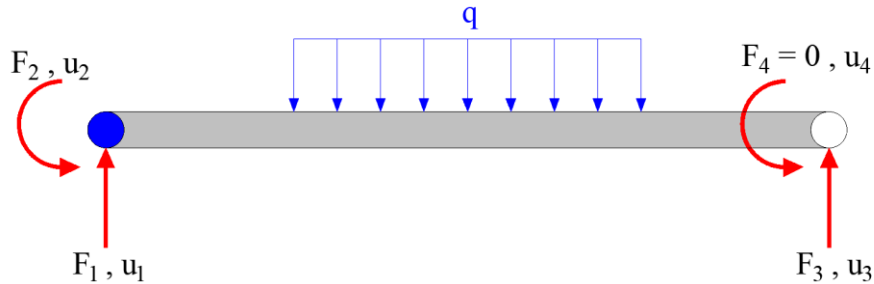


Figura 35. Elemento viga con articulación en el extremo derecho.

Es posible obtener el mismo resultado de los procedimientos anteriores al hacer uso del método de condensación estática, que será descrito en secciones posteriores.

3.4. Pórticos en 2D

Un pórtico en el plano se define como un conjunto de elementos rectos de dos dimensiones conectados entre sí mediante conexiones rígidas y/o articuladas, y se encuentran sometidas a cargas y reacciones que se encuentran en el plano de la estructura. Bajo la acción de cargas externas, los elementos de un pórtico plano pueden estar sujetos a fuerzas axiales como en armaduras, así como a los momentos de flexión y cortante en vigas (Kassimali, 2012).

El análisis de pórticos se verá que es la combinación de la metodología aplicada para los elementos anteriormente mencionados. El procedimiento para obtener una solución es parecido al de las vigas, pero se considera el efecto axial de las armaduras, y además será necesario el uso de matrices de transformación dado que los elementos de un pórtico pueden estar orientados en diferentes direcciones.

3.4.1. Matriz de Rigidez Elemental

Un elemento pórtico está referenciado en un sistema de coordenadas locales orientadas según la dirección del elemento, el cual consta de dos ejes: uno en la dirección longitudinal (eje X'), y otro en la dirección transversal (eje Y'), como se muestra en la Figura 36. Al igual que en las vigas, las fuerzas cortantes son positivas si actúan en la misma dirección del eje Y', y los momentos son positivos si actúan en sentido antihorario.

En cada extremo de un elemento pórtico se ubica un nodo, el cual tiene tres GDL, lo que a nivel de elemento son seis GDL: desplazamientos lineales en dirección longitudinal del elemento (u_1 y u_4), desplazamientos lineales en dirección transversal del elemento (u_2 y u_5), y desplazamientos angulares en cada extremo del elemento (u_3 y u_6). Las fuerzas externas aplicadas en los nodos pueden ser: fuerzas axiales (F_1 y F_4), fuerzas cortantes (F_2 y F_5), y momentos flectores (F_3 y F_6), las mismas que van acorde a la ubicación y sentido de los desplazamientos.

La matriz de rigidez de un elemento pórtico se puede obtener al combinar todos los casos estudiados de los elementos barras y vigas. Con esta combinación se puede determinar la relación *Fuerza-Desplazamiento*

para elementos tipo pórticos (relación generalizada) en coordenadas locales. Por lo tanto, esta relación escrita en forma matricial es:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}$$

Ecuación 45: Relación Fuerza-Desplazamiento de un elemento pórtico en 2D.

Y de forma abreviada es $\{P\} = [K]\{\delta\}$, que para llegar a la relación ya conocida $\{F\} = [K]\{u\}$ es necesario transformar las coordenadas locales a coordenadas globales.

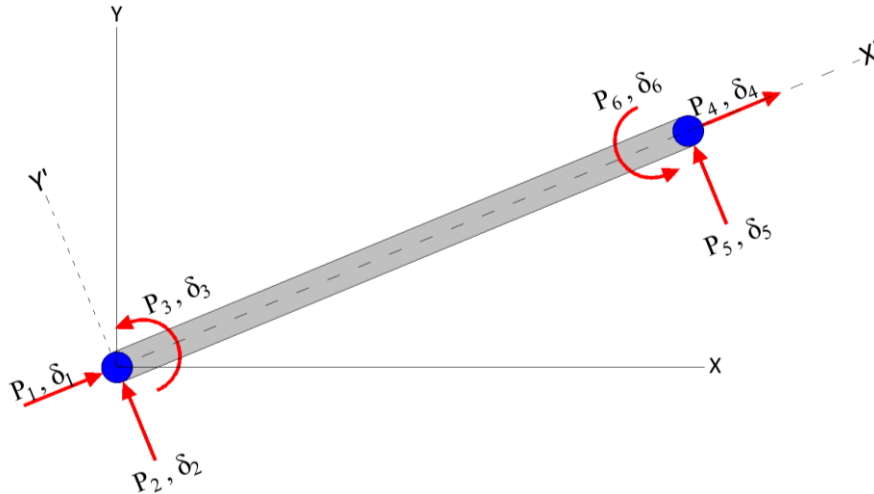


Figura 36: GDL de un elemento pórtico.

3.4.2. Sistema de Coordenadas

En las vigas, todos los elementos están orientados en la misma dirección, por lo cual, su sistema de coordenadas locales coincide con su sistema de coordenadas globales. Al contrario, en los pórticos planos generalmente contienen elementos orientados en varias direcciones. Por lo tanto, es necesario transformar las relaciones de rigidez de un elemento pórtico de un sistema de coordenadas locales al sistema de coordenadas globales antes de que puedan combinarse para establecer las relaciones de rigidez para toda la estructura (Kassimali, 2012). Para la transformación de coordenadas de elementos pórticos se utiliza las mismas relaciones de los elementos armadura desarrolladas en la sección 3.2.2, donde se debe incluir los 2 GDL por las rotaciones correspondientes a los momentos flectores en los extremos.

Considere el elemento pórtico que se muestra en la Figura 37. Se observa que los desplazamientos traslacionales en coordenadas globales, u_1 y u_2 , generan desplazamientos traslacionales en coordenadas locales, δ_1 y δ_2 . Por lo tanto:

$$\delta_1 = u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta$$

$$\delta_2 = -u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta$$

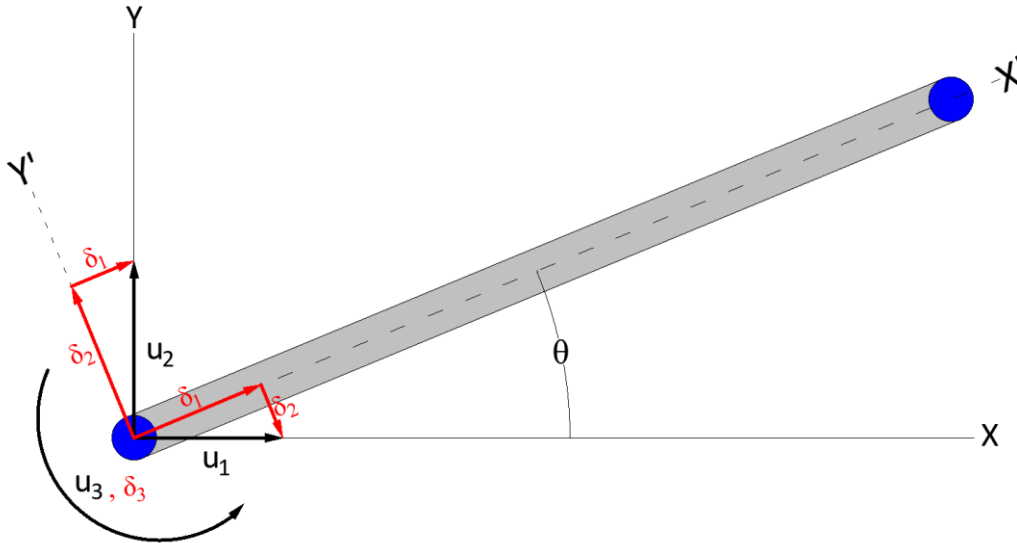


Figura 37: Relación entre desplazamientos en coordenadas globales con desplazamientos en coordenadas locales.

Y el desplazamiento rotacional en coordenadas globales, u_3 , coincide con el desplazamiento rotacional en coordenadas locales, δ_3 . Luego:

$$\delta_3 = u_3$$

De manera similar, se tiene en el nodo del extremo final:

$$\begin{aligned}\delta_4 &= u_4 \cos \theta + u_5 \sen \theta \\ \delta_5 &= -u_4 \sen \theta + u_5 \cos \theta \\ \delta_6 &= u_6\end{aligned}$$

Y en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sen \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sen \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sen \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sen \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

O bien, simbólicamente:

$$\{\delta\} = [\beta] \{u\} \rightarrow \{u\} = [\beta]^T \{\delta\}$$

La matriz de transformación para elementos pórticos, se muestra a continuación:

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sen \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sen \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sen \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sen \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 46: Matriz de transformación de coordenadas para un elemento pórtico.

Al igual que los desplazamientos, las fuerzas se transforman de la misma manera:

$$\{P\} = [\beta] \{F\} \rightarrow \{F\} = [\beta]^T \{P\}$$

Y la transformación de la matriz de rigidez de un elemento pórtico de coordenadas locales a coordenadas globales se realiza mediante la siguiente operación:

$$[k_G] = [\beta]^T [k_L] [\beta]$$

Este proceso se debe realizar a cada elemento que conforma la estructura antes de realizar el ensamblaje de la matriz de rigidez general.

3.4.3. Cargas No-Nodales

Los elementos pórticos que se encuentren cargados en su interior, se tratan de la misma manera que en vigas, pero se debe adicionar los dos GDL axiales que pertenecen a las barras. Entonces, el método de las Fuerzas de Empotramiento Perfecto se amplía con dos GDL axiales para pórticos.

Anteriormente, se estudió los casos de un elemento viga con una articulación en su extremo, los mismos que pueden ser extendidos para pórticos, pero no se consideró dos articulaciones en ambos extremos, dado que era imposible analizarlo sin adicionar el GDL axial. Como en un elemento pórtico sí se incluye tal GDL, se estudia el caso de que exista articulaciones en ambos extremos. La modificación de la matriz de rigidez y de las fuerzas de empotramiento perfecto se puede determinar con procesos similares al ocupado en vigas, considerando que el momento flector en esos nodos son cero. Entonces:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_{emp} = \begin{Bmatrix} F_{emp1} \\ F_{emp2} - \frac{1}{L}(F_{emp3} + F_{emp6}) \\ 0 \\ F_{emp4} \\ F_{emp5} + \frac{1}{L}(F_{emp3} + F_{emp6}) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se observa que, al considerar articulaciones en ambos extremos de un elemento pórtico, la matriz de rigidez modificada coincide con la matriz de rigidez para un elemento armadura añadido un GDL más.

3.4.4. Efectos de temperatura

Al igual que en una barra en 1D, se determina las fuerzas de empotramiento perfecto debido a cambios de temperatura. En el caso de las barras, la variación de temperatura fue considerada constante a lo largo de su peralte, dado que generalmente son secciones pequeñas. Lo que produce fuerzas axiales únicamente. Mientras que, en un elemento viga o pórtico, el peralte es considerable y debe determinarse los momentos flectores generados (Sennett, 1994).

Se considera un elemento pórtico que a lo largo de su longitud sufre una variación de temperatura en función de su peralte, como se muestra en la Figura 38.

Si se denotan a las temperaturas en la fibra superior e inferior de la viga, T_2 y T_1 , respectivamente, y h el peralte de la sección, entonces la variación de temperatura está dada por:

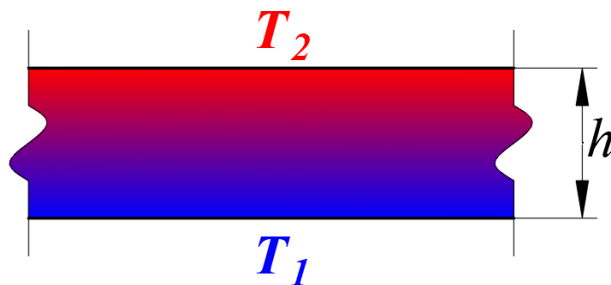


Figura 38: Variación de temperatura en función de su peralte (Sennett, 1994).

$$T(y) = \frac{T_2 + T_1}{2} + \frac{(T_2 - T_1)y}{h}$$

La deformación unitaria en cualquier punto de la sección es $\varepsilon(y) = \alpha T(y)$, y el esfuerzo determinado por $\sigma(y) = E\alpha T(y)$. La fuerza axial debido a cambios de temperatura es:

$$P = \int_A \sigma dA = \int_A E\alpha T(y) dA$$

Si se considera que la viga tiene un ancho constante $dA = bdy$, y se sabe que y varía desde $-h/2$ hasta $h/2$. Al integrar, resulta que:

$$P = \int_{-h/2}^{h/2} E\alpha T(y) bdy = EA\alpha \frac{T_1 + T_2}{2} = EA\alpha T_{prom}$$

Por otra parte, el momento flector por cambios de temperatura puede determinarse con:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} E\alpha T(y) bydy = \frac{EI\alpha(T_2 - T_1)}{h}$$

Si se considera que T_2 es mayor que T_1 , en las fuerzas de empotramiento perfecto para el momento flector inicial será horario (negativo) y el momento flector final será antihorario (positivo) (Sennett, 1994). Estas fuerzas expresadas vectorialmente para 6 GDL son:

$$F_{emp} = \begin{Bmatrix} EA\alpha T_{prom} \\ 0 \\ -EI\alpha(T_2 - T_1)/h \\ -EA\alpha T_{prom} \\ 0 \\ EI\alpha(T_2 - T_1)/h \end{Bmatrix}$$

Estas fuerzas se encuentran en coordenadas locales, por lo cual, para combinar en el vector general de fuerzas equivalentes es necesario transformarlas a coordenadas globales.

3.5. Temas especiales

3.5.1. Condensación estática

La condensación se refiere a la reducción del tamaño de un sistema de ecuaciones mediante la eliminación de ciertos GDL, pero aun en consideración de la influencia de ellos. Las ecuaciones condensadas contienen a los GDL permanentes (primarios), GDL t , que están en función de los GDL eliminados (secundarios), GDL o (McGuire et al., 2014). Al aplicar esto, tanto al vector de desplazamientos generales como las fuerzas externas, consecuentemente a la matriz de rigidez, la relación general $F = Ku$ queda dividida de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} F_t \\ F_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{tt} & K_{to} \\ K_{ot} & K_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_t \\ u_o \end{Bmatrix}$$

Por lo que se tiene un sistema de dos ecuaciones:

$$F_t = K_{tt}u_t + K_{to}u_o$$

$$F_o = K_{ot}u_t + K_{oo}u_o$$

Al despejar de esta última ecuación los GDL a eliminar, u_o :

$$u_o = K_{oo}^{-1}[F_o - K_{ot}u_t]$$

Y esto al sustituir en la otra ecuación, resulta:

$$F_t = K_{tt}u_t + K_{to}K_{oo}^{-1}[F_o - K_{ot}u_t]$$

$$F_t - K_{to}K_{oo}^{-1}F_o = [K_{tt} - K_{to}K_{oo}^{-1}K_{ot}]u_t$$

Y de manera abreviada:

$$F_{cond} = K_{cond}u_{cond}$$

Ecuación 47: Condensación estática de la relación fuerza-desplazamiento.

Donde:

$$F_{cond} = F_t - K_{to}K_{oo}^{-1}F_o$$

$$K_{cond} = K_{tt} - K_{to}K_{oo}^{-1}K_{ot}$$

$$u_{cond} = u_t$$

Se puede demostrar que el método de la condensación estática requiere un mayor número de operaciones aritméticas que la solución general de la forma no particionada, sin embargo, tiene la ventaja de permitir que el análisis se realice mediante la inversión de matrices de menor tamaño. Esto puede ser importante en el tratamiento de problemas de gran tamaño o en el uso de almacenamiento limitado del procesador de la computadora (McGuire et al., 2014).

La condensación estática es la base fundamental para la dinámica estructural, donde es necesario determinar la rigidez lateral de la estructura. La cual está constituida únicamente por los GDL laterales que tienen masa (GDL rotacionales no poseen masa). Como se indica mejor en la Figura 39, a la izquierda se indica los GDL del pórtico, cuando todos los elementos son axialmente rígidos; en cada piso hay un GDL lateral y en cada nodo libre hay GDL rotacionales. Al aplicar la condensación estática queda como resultado los GDL para determinar la rigidez lateral de la estructura, que se observa a la derecha de la Figura 39.

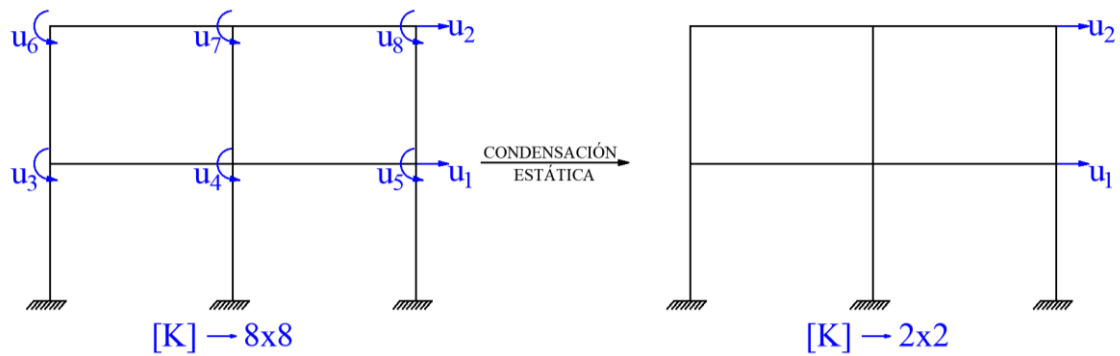


Figura 39: Condensación estática para determinar la rigidez lateral de la estructura.

La partición de la matriz de rigidez estudiado en la sección 3.1.4. es idéntico al método de la condensación estática. Este método ya fue utilizado de manera implícita cuando se considera conexiones con articulaciones en las vigas de la sección 3.3.3.

3.5.2. Aplicación de Restricciones (Constraints)

El término restricción puede ser utilizado para designar la eliminación de un GDL donde esté definido el desplazamiento, como por ejemplo en un apoyo. Sin embargo, en un sentido amplio está definido como un conjunto de relaciones entre GDL que son suplementarias a las relaciones básicas de rigidez (McGuire et al., 2014).

Es posible aplicar restricciones con el objetivo de eliminar deformaciones axiales, dado que la gran mayoría de geometrías de pórticos, las deformaciones axiales contribuyen muy poco en comparación con las deformaciones de flexión (Sennett, 1994). Además, al tener dos elementos separados, al aplicar restricciones es posible conectar ambos elementos mediante una conexión. En la Figura 40a, se tiene los GDL de un pórtico, al aplicar restricciones para eliminar la deformación axial en todos los elementos se tiene, $u_5 = u_2 = 0$, $u_8 = u_{11} = 0$, $u_7 = u_4$, y $u_1 = u_3 = u_{10} = u_{12} = 0$. Las filas y columnas de la matriz de rigidez se eliminan en el caso de GDL igual a cero; para el caso de $u_7 = u_4$, la fila y columna del GDL 7 pasa a sumar a la fila y columna del GDL 4, respectivamente, y luego se elimina la fila y columna del GDL 7. En la Figura 40b, se tiene dos elementos separados, que mediante restricciones se puede conectar, al hacer que $u_7 = u_4$, $u_8 = u_5$, y $u_9 = u_6$. Las restricciones derivan a la modificación de la matriz de rigidez, fila y columna de los GDL 7, 8 y 9 se suman a la fila y columna de los GDL 4, 5 y 6, respectivamente, y, por último, se eliminan los GDL 7, 8 y 9.

Las restricciones pueden ser expresadas en forma de matriz. Generalmente en los programas de cálculo estructural a esta matriz se la denominan “equalDOF”. La misma que para el presente proyecto está definida por cinco columnas: en la columna uno se ubica el nodo maestro, en la columna dos se ubica el nodo esclavo o restringido, en las columnas tres, cuatro y cinco contienen valores lógicos para desplazamientos horizontales, verticales y rotacionales, respectivamente, los cuales representan la limitación en el nodo esclavo para ser idénticos a los del nodo maestro. Existe el caso que en la columna cinco exista un valor no lógico, lo que significaría la cantidad de transporte del nodo maestro al nodo esclavo. Por ejemplo, para el caso particular analizado de la Figura 40b, la matriz tendrá los siguientes valores:

$$equalDOF = [2 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

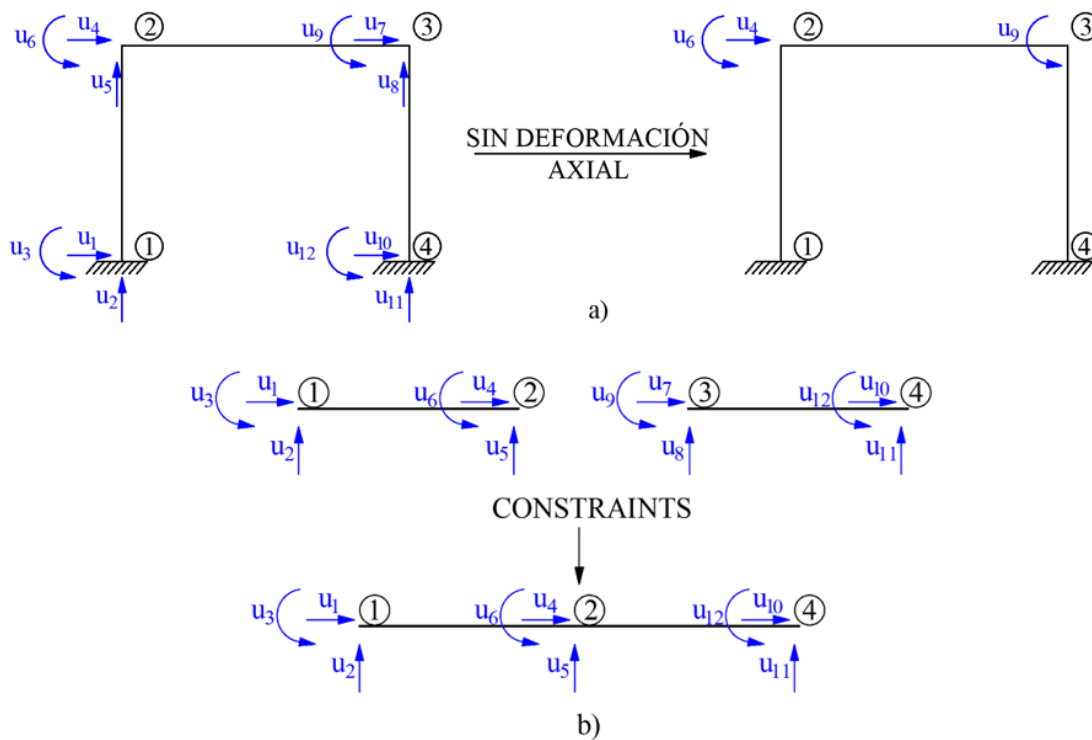


Figura 40: Ejemplos de aplicación de restricciones, a) Eliminar deformación axial, b) Conectar dos elementos.

Es importante indicar que se debe definir correctamente esta matriz, dado que, si a un nodo se le asigna como esclavo en tales GDL y luego al mismo nodo se le asigna como maestro en los mismos GDL, se generara un error en el análisis. Para evitar este error, a los dos nodos esclavos se le debe atribuir el nodo maestro inicial.

3.5.3. Deformación por Corte

La deformación por corte en los elementos, generalmente se desprecia cuando la relación entre su longitud y el peralte de la sección es relativamente grande, dado que la deformación por corte es bastante pequeña en comparación con la deformación por flexión. Aunque en ocasiones se pueden presentar relaciones de 10 o menor donde si influye la deformación por corte (Kassimali, 2012).

La deformación por corte muestra la diferencia entre la teoría de Timoshenko y la teoría de Euler-Bernoulli, y es que la primera considera tanto las deformaciones por flexión como las deformaciones por corte, mientras que la segunda considera únicamente deformaciones por flexión. Para el caso de elementos cortos en relación a las dimensiones de su sección, la teoría de Euler-Bernoulli deja de ser una aproximación válida (Luévanos, 2011).

Su efecto interviene en las relaciones de rigidez, lo que modifica la matriz de rigidez del elemento. La nueva matriz de rigidez considerando deformación por corte se obtiene con la siguiente teoría del esfuerzo cortante.

La relación entre la deformación de corte en una sección transversal de un elemento y la pendiente de la curva elástica debido al corte puede obtenerse considerando la deformación de corte de un elemento diferencial de longitud dx , al aplicar la fuerza de corte S . La Figura 41 muestra esta relación, del cual se obtiene:

$$\gamma = -\frac{d\bar{u}_{yS}}{dx}$$

Ecuación 48: Deformación unitaria de corte.

Donde:

γ : Deformación unitaria de corte

$d\bar{u}_{yS}$: Deflexión debida a corte

dx : Diferencial de longitud

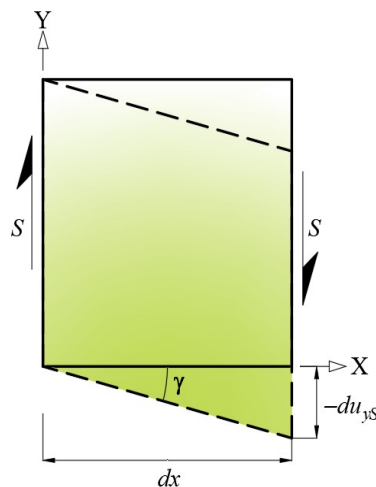


Figura 41: Esfuerzo cortante en un elemento diferencial (Kassimali, 2012).

El signo negativo indica un desplazamiento en sentido contrario al eje y . De la ley de Hooke se tiene $\tau = G\gamma$, y del esfuerzo cortante $\tau = \frac{f_s S}{A}$, sustituyendo estas expresiones se llega a:

$$\gamma = -\frac{d\bar{u}_{ys}}{dx} = \frac{f_s S}{G A}$$

Ecuación 49: Deformación unitaria de corte modificada.

Donde:

γ : Deformación unitaria de corte

G : Módulo de corte

f_s : Factor de forma

A : Área de la sección transversal

S : Fuerza Cortante

El módulo de corte con valor de $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$, del cual E representa el módulo de elasticidad y ν es el coeficiente de Poisson.

Según Kassimali (2012), el factor de forma depende de la sección transversal, en la Tabla 5 se muestran valores para secciones típicas.

Tabla 5: Factores de forma (Kassimali, 2012).

Sección	f_s
Rectangular	1.2
Circular	10/9
Perfil I	1

Para obtener la matriz de rigidez modificada por el efecto a corte se realiza el análisis de deformaciones unitarias como en la sección 3.3.1. Los análisis son similares, por esta razón solo se detalla el primer caso.

Caso Uno: Consiste en aplicar al elemento un desplazamiento unitario en el GDL u_1 en el extremo inicial, como se muestra en la Figura 29. Con lo cual surgen las fuerzas cortantes k_{11} y k_{31} , y los momentos flectores k_{21} y k_{41} . Para determinar el valor de estos coeficientes se determina las ecuaciones de corte (R.1) y momento (R.2) que se generan en el elemento con respecto a una distancia x del extremo inicial, las mismas que se muestran a continuación:

$$S = k_{11} \quad (R.1)$$

$$M = -k_{21} + k_{11} \cdot x \quad (R.2)$$

Reemplazando la relación R.1 en la Ecuación 49, e integrando la ecuación resultante, obtenemos la relación para la deflexión, debido al corte:

$$\bar{u}_{ys} = -\left(\frac{f_s}{G A}\right) k_{11} x + c_1 \quad (R.3)$$

Al sustituir la relación R.2 en la Ecuación 29, e integrando la ecuación resultante dos veces, se obtiene las relaciones para la pendiente y la deflexión del elemento, debido a la flexión:

$$\theta = \frac{d\bar{u}_{yB}}{dx} = \frac{1}{EI} \left(-k_{21} x + k_{11} \frac{x^2}{2} \right) + c_2 \quad (R.4)$$

$$\bar{u}_{yB} = \frac{1}{EI} \left(-k_{21} \frac{x^2}{2} + k_{11} \frac{x^3}{6} \right) + c_2 x + c_3 \quad (R.5)$$

Como el efecto por corte no genera rotación en el elemento, la rotación de la sección transversal, θ , resulta completamente de la deformación por flexión. Al combinar la relación R.3 y R.5, obtenemos la ecuación para la deflexión total.

$$\bar{u}_y = \bar{u}_{yS} + \bar{u}_{yB} = -\left(\frac{f_s}{G \cdot A}\right) k_{11} x + \frac{1}{EI} \left(-k_{21} \frac{x^2}{2} + k_{11} \frac{x^3}{6} \right) + c_2 x + c_4$$

Para determinar las constantes de integración, se utilizan las siguientes cuatro condiciones:

En el extremo inicial,

$$\begin{aligned} x = 0 & \rightarrow \theta = 0 \\ x = 0 & \rightarrow \bar{u}_y = 1 \end{aligned}$$

En el extremo final,

$$\begin{aligned} x = L & \rightarrow \theta = 0 \\ x = L & \rightarrow \bar{u}_y = 0 \end{aligned}$$

Al aplicar las condiciones iniciales en las relaciones R.4 y R.6 se obtiene:

$$0 = \frac{1}{EI} \left(-k_{21} \cdot 0 + k_{11} \cdot \frac{0^2}{2} \right) + c_2 \rightarrow c_2 = 0$$

$$1 = -\left(\frac{f_s}{G \cdot A}\right) \cdot k_{11} \cdot 0 + \frac{1}{EI} \cdot \left(-k_{21} \cdot \frac{0^2}{2} + k_{11} \cdot \frac{0^3}{6} \right) + c_2 \cdot 0 + c_4 \rightarrow c_4 = 1$$

Ahora se reemplaza las constantes de integración en las relaciones R.4 y R.6 y se aplica las condiciones finales, con lo cual se obtiene:

$$0 = \frac{1}{EI} \cdot \left(-k_{21} \cdot L + k_{11} \frac{L^2}{2} \right) \rightarrow k_{21} = k_{11} \cdot \frac{L}{2} \quad (R.7)$$

$$0 = -\left(\frac{f_s}{G \cdot A}\right) \cdot k_{11} \cdot L + \frac{1}{EI} \cdot \left(-k_{21} \cdot \frac{L^2}{2} + k_{11} \cdot \frac{L^3}{6} \right) + 1 \rightarrow -1 = k_{11} \cdot \left(-\frac{f_s \cdot L}{G \cdot A} + \frac{L^3}{6 \cdot EI} \right) - \frac{k_{21} \cdot L^2}{2 \cdot EI} \quad (R.8)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones generado por las relaciones R.7 y R.8.

$$-1 = k_{11} \cdot \left(-\frac{f_s \cdot L}{G \cdot A} + \frac{L^3}{6 \cdot EI} \right) - \frac{k_{11} \cdot L^3}{4 \cdot EI} \rightarrow -1 = k_{11} \cdot \left(-\frac{f_s \cdot L}{G \cdot A} + \frac{L^3}{6 \cdot EI} - \frac{L^3}{4 \cdot EI} \right)$$

$$-1 = k_{11} \cdot \left(-\frac{f_s \cdot L}{G \cdot A} + \frac{L^3}{6 \cdot EI} - \frac{3/2 L^3}{6 \cdot EI} \right) \rightarrow -1 = k_{11} \cdot \left(-\frac{f_s \cdot L}{G \cdot A} - \frac{L^3}{12 \cdot EI} \right)$$

$$k_{11} = \frac{1}{\frac{f_s \cdot L}{G \cdot A} + \frac{L^3}{12 \cdot EI}} \rightarrow k_{11} = \frac{1}{\frac{12 \cdot EI \cdot f_s \cdot L + G \cdot A \cdot L^3}{12 \cdot G \cdot A \cdot EI}}$$

$$k_{11} = \frac{12 \cdot G \cdot A \cdot EI}{12 \cdot EI \cdot f_s \cdot L + G \cdot A \cdot L^3} \rightarrow k_{11} = \frac{12 \cdot EI}{L^3} \left(\frac{12 \cdot G \cdot A}{\frac{12 \cdot EI \cdot f_s}{L^2} + G \cdot A} \right)$$

$$k_{11} = \frac{12 \cdot EI}{L^3} \left(\frac{G \cdot A \cdot L^2}{12 \cdot EI \cdot f_s + G \cdot A \cdot L^2} \right) \rightarrow k_{11} = \frac{12 \cdot EI}{L^3} \left(\frac{G \cdot A \cdot L^2}{12 \cdot EI \cdot f_s} + \frac{G \cdot A \cdot L^2}{G \cdot A \cdot L^2} \right)$$

$$k_{11} = \frac{12 \cdot EI}{L^3} \left(\frac{G \cdot A \cdot L^2}{12 \cdot EI \cdot f_s} + 1 \right) \rightarrow \beta_s = \frac{12 EI f_s}{G A L^2} \rightarrow k_{11} = \frac{12 EI}{L^3} \left(\frac{1}{1 + \beta_s} \right)$$

$$k_{21} = k_{11} \cdot \frac{L}{2} \rightarrow k_{21} = \frac{12 EI}{L^3} \left(\frac{1}{1 + \beta_s} \right) \cdot \frac{L}{2} \rightarrow k_{21} = \frac{6 EI}{L^2} \left(\frac{1}{1 + \beta_s} \right)$$

El parámetro adimensional β_s se llama constante de deformación de corte. Ahora se pueden determinar los dos coeficientes de rigidez restantes, k_{31} y k_{41} aplicando las ecuaciones de equilibrio en el elemento (Figura 29).

$$k_{11} = -k_{31} \rightarrow k_{31} = -\frac{12 EI}{L^3} \left(\frac{1}{1 + \beta_s} \right)$$

$$k_{11} = k_{41} \rightarrow k_{41} = \frac{6 EI}{L^2} \left(\frac{1}{1 + \beta_s} \right)$$

Se ha determinado todos los coeficientes de rigidez para el caso uno. Para los tres casos restantes se aplica desplazamientos unitarios de la misma manera y posteriormente se realiza un procedimiento similar. La matriz de rigidez modificada por el efecto a corte es la siguiente:

$$K = \frac{EI}{L^3(1 + \beta_s)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & L^2(4 + \beta_s) & -6L & L^2(2 - \beta_s) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & L^2(2 - \beta_s) & -6L & L^2(4 + \beta_s) \end{bmatrix}$$

Ecuación 50: Matriz de rigidez modificada por deformación por corte para un elemento viga en 2D.

3.5.4. Conexión por Desfase

Al transformar una estructura real a un modelo analítico se descuida la geometría real de la estructura, específicamente, se ignora las dimensiones reales de las conexiones entre elementos. Y esto es correcto en la mayoría de los casos, como son las estructuras de acero. Sin embargo, en estructuras de hormigón, que requieren grandes secciones sí se debería considerar las dimensiones de las conexiones.

En la Figura 42, se indica las dimensiones de conexiones que se deben tomar en cuenta para un análisis. La Figura 42a muestra una viga que conecta dos columnas, para transformar en un modelo analítico se idealizan las vigas y columnas como líneas que pasan por los ejes céntricos de columnas y vigas. En la Figura 42b se muestra el modelo analítico que no considera la geometría de los elementos. Y en la Figura 42c se muestra el mismo modelo analítico que considera las distancias donde coinciden la viga y las columnas, por lo cual, los extremos de los elementos quedan desfasados por estas distancias. En el caso de la viga, su longitud debe ser disminuida por las mitades de los anchos de las columnas inicial y final, d_b y d_e , respectivamente.

Para realizar un análisis teniendo en cuenta las conexiones, es factible dividir el elemento en tres partes y en los desfases asignar grandes rigideces, sin embargo, esto acarrea problemas como el aumento del tamaño de la matriz de rigidez de la estructura y el proceso de resolución sería menos eficiente. Como otra alternativa, se puede modificar la matriz de rigidez del elemento para incluir los efectos de los desfases en los extremos, sin alterar la dimensión de la matriz.

Para determinar una correspondencia entre las fuerzas aplicadas en el extremo y fuerzas aplicadas a las distancias desfasadas, d_e y d_b , considere la Figura 43, en la cual, la viga se dividió en tres elementos, los dos desfases de la aportación de las columnas, d_b y d_e , y la viga reducida. Ahora, al considerar el elemento de desfase inicial de longitud d_b , se tiene por equilibrio:

$$\bar{P}_1 = P_1$$

$$\bar{P}_2 = P_2$$

$$\bar{P}_3 = d_b P_2 + P_3$$

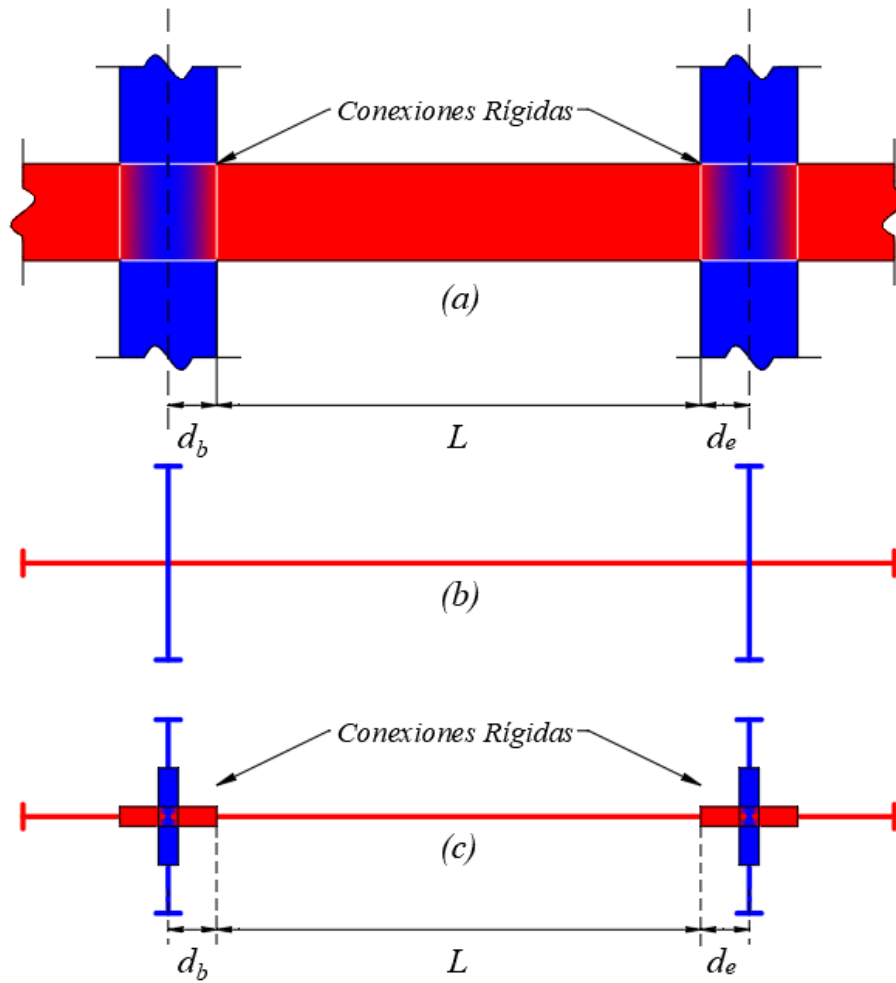


Figura 42: Conexiones por desfase: a) Estructura, b) Modelo analítico sin considerar las dimensiones de las conexiones, c) Modelo analítico al considerar las dimensiones de las conexiones (Kassimali, 2012).

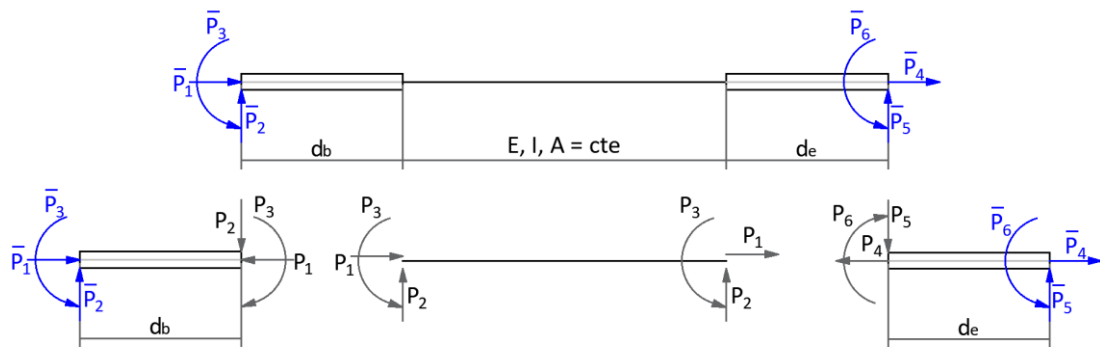


Figura 43: Segmentación de un elemento debido a conexiones por desfase.

Igualmente, en el elemento de desfase final de longitud d_e :

$$\bar{P}_4 = P_4$$

$$\bar{P}_5 = P_5$$

$$\bar{P}_6 = -d_e P_5 + P_6$$

Expresándolo en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_e & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

Y de forma abreviada:

$$\bar{P} = T P \rightarrow P = T^{-1} \bar{P}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_e & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 51: Matriz de transformación que relaciona las fuerzas por desfase con las fuerzas externas.

De donde: \bar{P} son las fuerzas en los extremos, P son las fuerzas en la ubicación desfasada por d_b y d_e , y T es la matriz de transformación que traslada las fuerzas de la distancia desfasada a los extremos. Tanto fuerzas desfasadas como fuerzas en los extremos se definen en coordenadas locales.

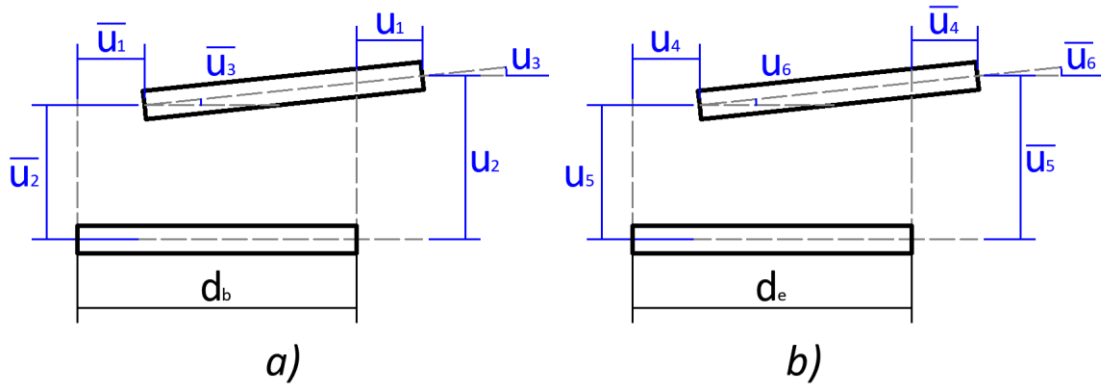


Figura 44: Conexiones por desfase, a) conexión rígida d_b , b) conexión rígida d_e .

De la Figura 44a se observa que el giro \bar{u}_3 es muy pequeño, por lo cual se puede asumir que $\cos \bar{u}_3 \approx 1$ y $\sin \bar{u}_3 \approx \bar{u}_3$. Y por geometría se tiene:

$$\begin{aligned} u_1 + d_b &= \bar{u}_1 + d_b \cos \bar{u}_3 \rightarrow u_1 = \bar{u}_1 \\ u_2 &= \bar{u}_2 + d_b \sin \bar{u}_3 \rightarrow u_2 = \bar{u}_2 + d_b \bar{u}_3 \\ u_3 &= \bar{u}_3 \end{aligned}$$

De la misma manera, la Figura 44b muestra que el giro \bar{u}_6 es muy pequeño, por lo cual se puede asumir que $\cos \bar{u}_6 \approx 1$ y $\sin \bar{u}_6 \approx \bar{u}_6$. Y por geometría se tiene:

$$\begin{aligned} u_4 + d_e \cos \bar{u}_6 &= \bar{u}_4 + d_e \rightarrow u_4 = \bar{u}_4 \\ u_5 &= \bar{u}_5 - d_e \sin \bar{u}_6 \rightarrow u_5 = \bar{u}_5 - d_e \bar{u}_6 \\ u_6 &= \bar{u}_6 \end{aligned}$$

Estas relaciones de los desplazamientos expresados en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -d_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{Bmatrix}$$

Y de manera simbólica se tiene:

$$u = T^T \bar{u}$$

De la relación general en coordenadas locales:

$$P = Ku + P_{emp}$$

Al sustituir las relaciones de fuerzas y desplazamientos en la anterior ecuación:

$$T^{-1} \bar{P} = K T^T \bar{u} + P_{emp} \rightarrow T T^{-1} \bar{P} = T K T^T \bar{u} + T P_{emp}$$

$$\bar{P} = T K T^T \bar{u} + T P_{emp} \rightarrow \bar{P} = \bar{K} \bar{u} + \bar{P}_{emp}$$

De donde:

$$\bar{K} = T K T^T \quad \text{y} \quad \bar{P}_{emp} = T P_{emp}$$

Y en forma expandida:

$$\bar{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L + 12d_b & 0 & -12 & 6L + 12d_e \\ 0 & 6L + 12d_b & 4L^2 + 12Ld_b + 12d_b^2 & 0 & -6L - 12d_b & 2L^2 + 6Ld_b + 6Ld_e + 12d_b d_e \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L - 12d_b & 0 & 12 & -6L - 12d_e \\ 0 & 6L + 12d_e & 2L^2 + 6Ld_b + 6Ld_e + 12d_b d_e & 0 & -6L - 12d_e & 4L^2 + 12Ld_e + 12d_e^2 \end{bmatrix}$$

Ecuación 52: Matriz de rigidez modificada por conexiones con desfase.

$$\bar{P}_{emp} = \begin{Bmatrix} P_{emp1} \\ P_{emp2} \\ d_b P_{emp2} + P_{emp3} \\ P_{emp4} \\ P_{emp5} \\ -d_e P_{emp5} + P_{emp6} \end{Bmatrix}$$

Ecuación 53: Fuerzas de empujamiento perfecto incluida las conexiones con desfase.

3.6. Proceso para Análisis Lineal Generalizado

De acuerdo con los conceptos revisados en este capítulo, se desarrollará el procedimiento paso a paso para el análisis de un elemento en el plano, ya sea una estructura conformada por elementos armadura o pórtico mediante el método de los desplazamientos.

Se definen los nombres de las variables con las que se utiliza en el Diagrama de Flujo en paréntesis y aplicado el formato de Cursiva.

Paso 1: Realizar un modelo analítico de la estructura. Identificando los nodos, sus coordenadas, fuerzas aplicadas, y GDL con y sin restricción (XY). Después, se identifican los elementos, sus propiedades

geométricas y del material, además incluir los desfases de cada extremo (*CONN*). Finalmente, modelar las fuerzas cargadas en el interior del elemento (*CARGAS*).

Paso 2: Formar los vectores de fuerzas externas (F_{ext}), restricciones y desplazamientos generalizados de orden GDLx1 (u). En los GDL que se desconocen las fuerzas (reacciones) y desplazamientos inicialmente se colocan en cero. Del vector de restricciones se determinan los GDLs (s) y GDLp (p).

Paso 3: Determinar la longitud (L) y dirección de cada elemento (θ). Determinar la matriz de transformación de coordenadas (β) y de traslación por conexiones rígidas (T), de acuerdo con la Ecuación 46 y Ecuación 51, respectivamente. Finalmente, determinar la matriz de rigidez elemental con las modificaciones que incluyen la deformación de corte con la Ecuación 50.

Paso 4: Realizar la condensación estática a la matriz de rigidez local para determinar si se trata de un análisis tipo armadura o pórtico, mediante la eliminación de fuerzas en los GDL (*releases*). Luego, transformar la matriz de rigidez a coordenadas globales para realizar la combinación de rigideces (Ensamblaje K).

Paso 5: Transformar las fuerzas no nodales en fuerzas equivalentes nodales mediante el método de la Fuerzas de Empotramiento Perfecto (F_{emp}, F_{equiv}) y añadir al GDL correspondiente del vector de fuerzas externas (F). Después, aplicar las restricciones a la matriz de rigidez general de la estructura (*equalDOF*).

Paso 6: Realizar la partición de la matriz de rigidez de la estructura (K_{pp}), del vector de fuerzas externas (F_p) y del vector de desplazamientos generales (u_p). Determinar los desplazamientos desconocidos mediante la Ecuación 11 y las fuerzas desconocidas (F_s) mediante la Ecuación 10. Determinar las reacciones (R) en los GDLs (s) de acuerdo con la Ecuación 12.

Paso 7: Determinar las fuerzas elementales (f_e) mediante la relación elemental *Fuerza-Desplazamiento*, considerar las fuerzas no-nodales de la Ecuación 13. Finalmente, transformar las fuerzas elementales a coordenadas locales (p_e) de acuerdo con la sección 3.2.2, y trasladar las fuerzas a los extremos en caso de conexiones por desfase de acuerdo con la sección 3.5.4 (p_{ex}, f_{ex}).

3.7. Proceso para Análisis No-Lineal en Pórticos en 2D

El análisis de una estructura aplicada un estado de carga creciente, inicialmente se trabaja en el rango lineal, hasta que se producen regiones localizadas donde se supone y espera la fluencia de los elementos, denominadas rótulas plásticas. A partir de la fluencia de un elemento, este incursiona en el rango no lineal, mientras que el resto de la estructura continua en el rango lineal (Sáez, 2014).

3.7.1. Método de Carga Unitaria por Eventos

El procedimiento para análisis no lineal para pórticos es muy similar al de armaduras, el cual se revisó en la sección 3.2.5. Entonces, por lo cual, se aplica iteraciones de un análisis lineal de acuerdo con un incremento de cargas considerando la modificación de la matriz de rigidez, que se ve disminuida por los elementos que van fluyendo. Según (Flores, 2018), este procedimiento se describe en los siguientes pasos:

Paso 1: Al igual que el *Paso 1* de la sección 3.3 se realiza un modelo analítico, en el cual, se incorpora las rótulas plásticas modelas como elementos de longitud cero (*CONN**), ubicadas en los extremos de las vigas y en el extremo inferior de las columnas. Las rótulas plásticas inicialmente comparten las propiedades del elemento constituyente, pero una vez incursionado el rango inelástico, las rótulas empiezan a cambiar de propiedades de acuerdo con la Figura 2b. Estas rótulas se modelan como un resorte rotacional, conectadas a los elementos mediante la aplicación de restricciones (*equalDOF*). Inicialmente la restricción de una rótula plástica es:

$$equalDOF = [M \ S \ 1 \ 1 \ Ks_o]$$

De donde, M es el nodo maestro, S es el nodo restringido o esclavo, la 3ra y 4ta columna representa la transmisión de fuerza axial y cortante en su totalidad, respectivamente, y Ks_o es la rigidez del resorte rotacional, la misma en viga o columna.

Paso 2: Aplicar una carga unitaria en la dirección del GDL seleccionado para controlar los desplazamientos (GDLc). En este punto, se realiza un análisis lineal siguiendo los pasos del 2 al 7 de la sección 3.3.

Paso 3: Determinar la fuerza aplicada a la estructura que causa fluencia en algún resorte modelado. Como la fuerza aplicada inicialmente es unitaria, las fuerzas necesarias para que fluya cada rótula plástica es:

$$P = \frac{M_p - \sum F_{f-ant}}{f_e}$$

Donde: M_p es el momento plástico de la rótula plástica, $\sum F_{f-ant}$ es la acumulación de fuerzas aplicadas en esa rótula plástica (si esta no fluyó en la anterior iteración), y f_e es la fuerza interna del resorte producto de la aplicación de la carga unitaria a la estructura. En la primera iteración, el factor $\sum F_{f-ant} = 0$, dado que recién se determina la primera fuerza de fluencia. Finalmente, la menor fuerza P , es la necesaria para que fluya el correspondiente resorte.

Paso 4: Determinar los desplazamientos en cada GDL y las fuerzas en los resortes debida a la fuerza P (del paso anterior) aplicada a la estructura, que causó la fluencia en determinado resorte. Para ello, los desplazamientos producidos por la carga unitaria y las f_e de cada resorte se multiplican por P .

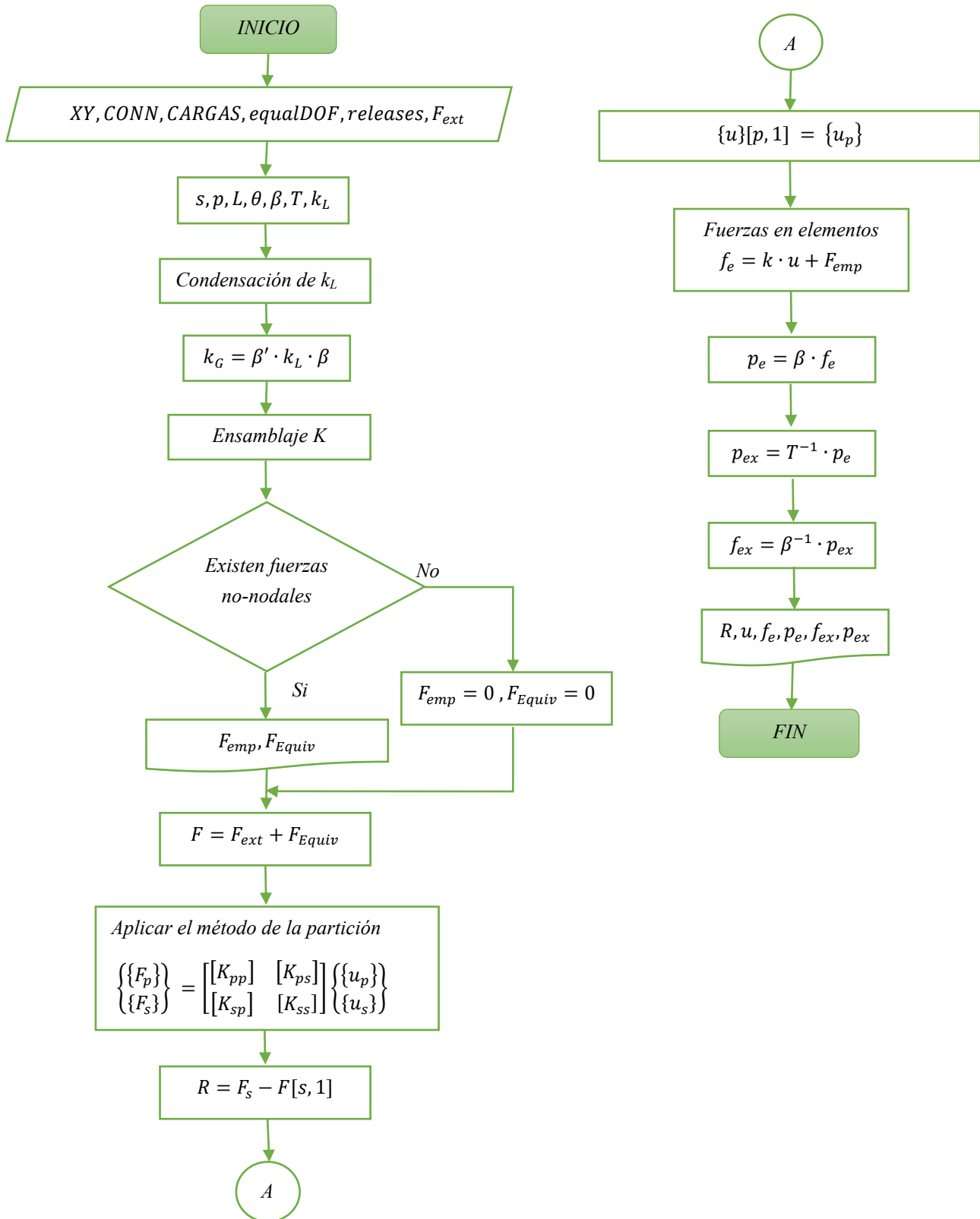
Paso 5: Identificar el resorte que fluyó y modificar la rigidez de este por K_s de acuerdo con la Figura 2b. Consecuentemente, actualizar la matriz de rigidez de la estructura mediante la modificación de la restricción inicial de la rótula plástica:

$$equalDOF = [M \ S \ 1 \ 1 \ Ks]$$

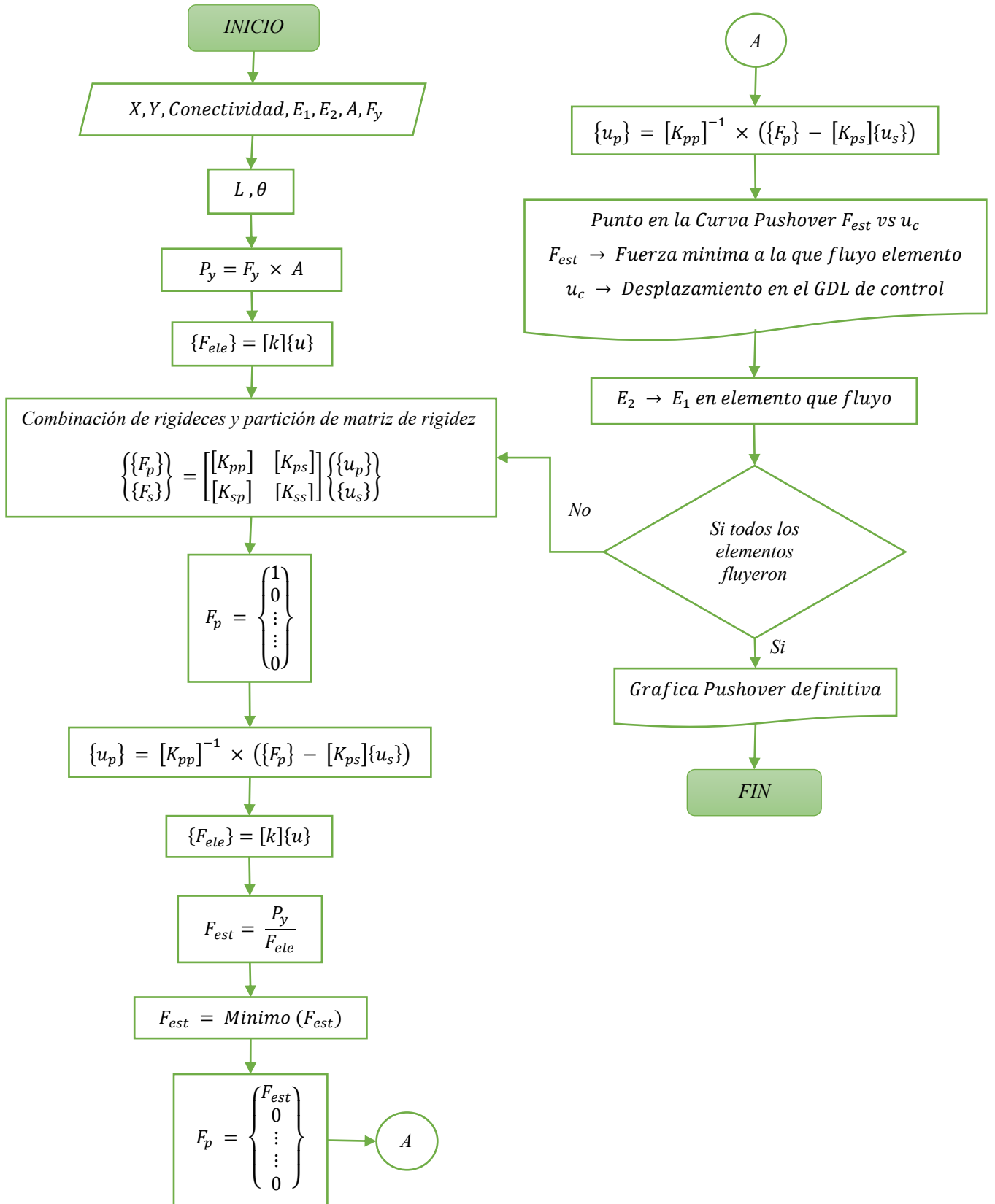
Paso 6: Determinar el siguiente resorte que fluye. Luego, iterar de nuevo desde el Paso 2 hasta el Paso 5. Este proceso se realiza hasta que todos los resortes de la estructura alcancen la fluencia. En cada iteración, se extrae la fuerza de fluencia P y los desplazamientos u producidos por P .

3.8. Algoritmos para Implementación en Computadora

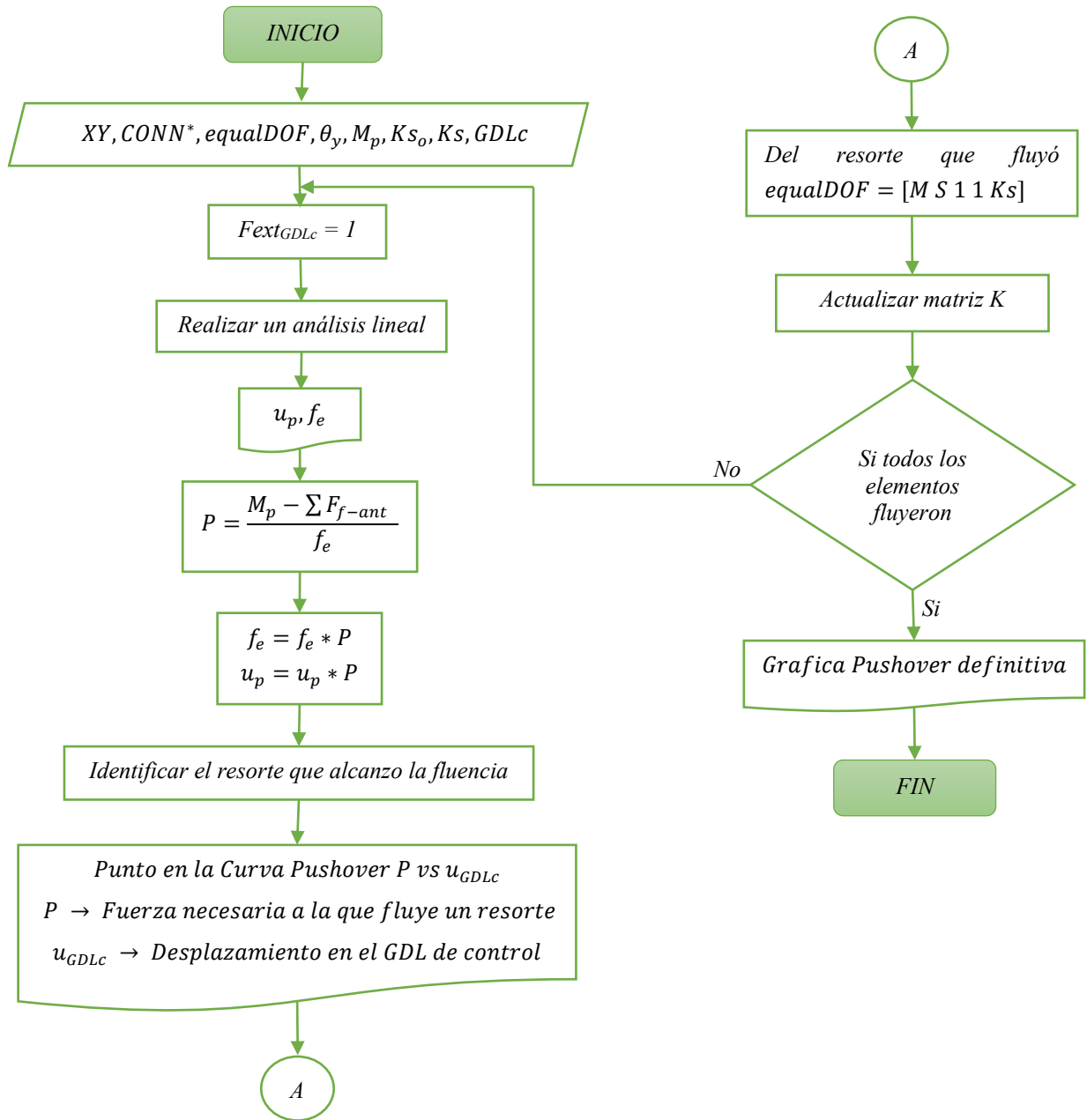
3.8.1. Algoritmo de Análisis Lineal Generalizado



3.8.2. Algoritmo de Análisis No-Lineal de Armaduras en 2D



3.8.3. Algoritmo de Análisis No-Linear de Pórticos en 2D



4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el presente capítulo se aplicaron los algoritmos del método de los desplazamientos, los mismos que se detallan en la sección 3.8, con los cuales se desarrolló el análisis estático lineal y no-lineal tanto de armaduras como en pórticos en 2D por el programa desarrollado (UCAS2D).

4.1. Ejemplos Académicos de Armaduras en 2D

4.1.1. Ejemplo A1: Armaduras en 2D Análisis Lineal

En este ejemplo se desarrolló el análisis estático lineal de la armadura en 2D mostrada en la Figura 45. La armadura fue sometida a cargas nodales, no-nodales, cambios de temperatura, errores de fabricación y desplazamientos iniciales en los apoyos.

4.1.1.1. Material y Sección

Para la estructura en análisis se utilizó Acero A36 con las siguientes propiedades:

Tabla 6: Propiedades del Acero A36.

Acero A36		
Propiedad	Valor	Unidad
Módulo de Elasticidad	2038.9019	Tonf/cm ²
Coeficiente de Poisson	0.3	
Coeficiente de Expansión Térmica	1.17E-05	1/C°
Módulo de Corte	784.193	Tonf/cm ²
Esfuerzo de Fluencia	2.5311	Tonf/cm ²

Se modeló dos secciones sólidas rectangulares con diferentes dimensiones, la primera fue asignada a los elementos horizontales y la segunda a los elementos diagonales. Las dimensiones de las secciones se muestran a continuación:

Tabla 7: Propiedades de la Sección Ejemplo A1.

Sección	Altura (cm)	Base (cm)	Tipo	Material
SR 7x7	7	7	Sección sólida rectangular	A36
SR 10x10	10	10	Sección sólida rectangular	A36

4.1.1.2. Tabla de Nodos y Conectividad

Para identificar los nodos de la estructura se especificó las coordenadas y restricciones de cada uno por medio de la siguiente tabla:

Tabla 8: Tabla de Nodos Ejemplo A1.

N° Nodo	X (cm)	Y (cm)	Restricción
1	0	0	Articulado
2	300	0	Libre
3	600	0	Libre
4	900	0	Apoyado en Y
5	150	300	Libre
6	450	300	Libre
7	750	300	Libre

Para identificar la conectividad y las propiedades asociadas a cada elemento se generó la tabla de conectividad, la misma que se muestra a continuación:

Tabla 9: Tabla de Conectividad Ejemplo A1.

Nº Elemento	Nodo Inicial	Nodo Final	Sección
1	1	2	SR 7x7
2	2	3	SR 7x7
3	3	4	SR 7x7
4	1	5	SR 10x10
5	5	6	SR 7x7
6	6	7	SR 7x7
7	7	4	SR 10x10
8	5	2	SR 10x10
9	6	3	SR 10x10
10	2	6	SR 10x10
11	3	7	SR 10x10

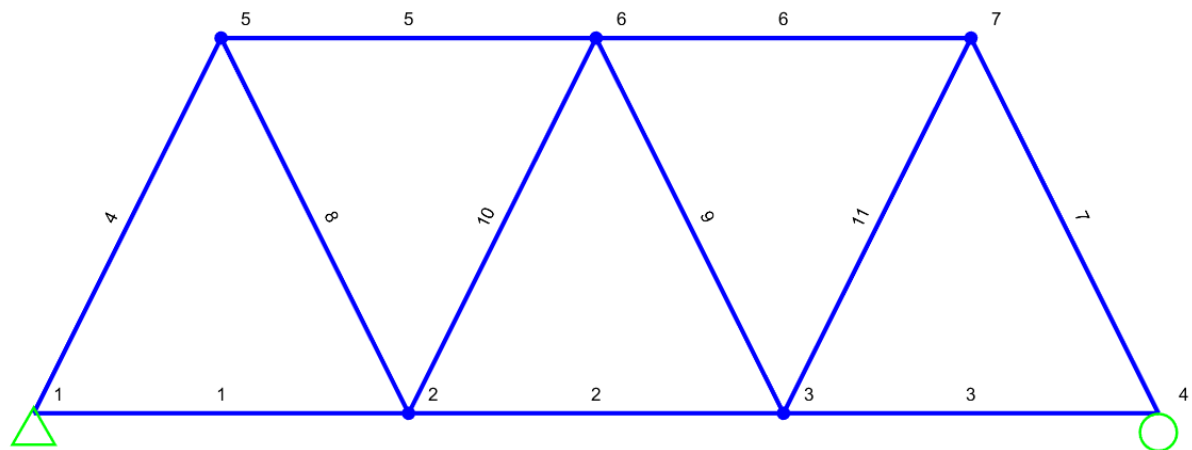


Figura 45: Ejemplo Armadura en 2D Análisis Lineal.

4.1.1.3. Tabla de Cargas

Según el tipo de carga, se la puede asignar a nodos o elementos. Para el ejemplo en análisis se asignó cargas nodales y desplazamientos iniciales en apoyos en coordenadas globales, la tabla de cargas en nodos se muestra a continuación:

Tabla 10: Tabla de Cargas en Nodos Ejemplo A1.

Nodo	F. Nodales		Desp. Inicial	
Nº	Fx (Tonf)	Fy (Tonf)	Ux (cm)	Uy (cm)
1	0	0	5	0
5	1	-1	0	0
6	0	-2	0	0
7	0	-1	0	0

Para el ejemplo se asignó: cargas no-nodales (carga distribuida axial W_x), cargas por cambios de temperatura (ΔT) y cargas por errores de fabricación (ΔL) en coordenadas locales. La tabla de cargas en los elementos se muestra a continuación:

Tabla 11: Tabla de Cargas en Elementos Ejemplo A1.

Nº Elemento	W_x (Tonf/cm)	ΔT (°C)	ΔL (cm)
2	0.01	0	0
4	0	0	10
5	0	20	0
6	0	20	0
7	0	0	10

4.1.1.4. Método de los Desplazamientos

Matrices de Rigideces Elementales Globales (k_{Gi}): Los elementos con idéntico material, sección, longitud y orientación tienen la misma matriz de rigidez. Las matrices de rigideces calculadas para cada elemento fueron las siguientes:

$$k_{G1} = k_{G2} = k_{G3} = k_{G5} = k_{G6} = \begin{bmatrix} 333.02 & 0 & 0 & -333.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -333.02 & 0 & 0 & 333.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{G4} = k_{G10} = k_{G11} = \begin{bmatrix} 121.57 & 243.15 & 0 & -121.57 & -243.15 & 0 \\ 243.15 & 486.30 & 0 & -243.15 & -486.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -121.57 & -243.15 & 0 & 121.57 & 243.15 & 0 \\ -243.15 & -486.30 & 0 & 243.15 & 486.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{G7} = k_{G8} = k_{G9} = \begin{bmatrix} 121.57 & -243.15 & 0 & -121.57 & 243.15 & 0 \\ -243.15 & 486.30 & 0 & 243.15 & -486.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -121.57 & 243.15 & 0 & 121.57 & -243.15 & 0 \\ 243.15 & -486.30 & 0 & -243.15 & 486.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices de Rigidez General (K): Luego de obtener las matrices de rigideces elementales globales se realizó la combinación de matrices, con lo cual se obtuvo la matriz de rigidez general, la misma que se muestra en el Anexo 2. Para este caso, la estructura tuvo 7 nodos lo que implicó 21 GDL, por lo tanto, la matriz de rigidez general tuvo dimensiones de 21x21.

Partición de la Matriz: Como se detalla en la sección 3.1.4, la partición comenzó con la determinación de los GDLs y GDLp. Como se analizó una estructura tipo armadura, se eliminó los GDL respectivos a la rotación facilitando el cálculo computacional.

$$GDLs = \{1 \ 2 \ 11\}$$

$$GDLp = \{4 \ 5 \ 7 \ 8 \ 10 \ 13 \ 14 \ 16 \ 17 \ 19 \ 20\}$$

Posteriormente se realizó la partición

$$\begin{Bmatrix} \{F_p\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{ps}] \\ [K_{sp}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_p\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix}$$

y se obtuvo las siguientes matrices K_{pp} , K_{ps} , K_{sp} y K_{ss} .

Desplazamientos Desconocidos y Reacciones: Estos resultados se obtuvieron por medio de la Ecuación 11, Ecuación 10 y Ecuación 12.

$$\{u_p\} = [K_{pp}]^{-1} \times (\{F_p\} - [K_{ps}]\{u_s\})$$

$$\{F_s\} = [K_{sp}]\{u_p\} + [K_{ss}]\{u_s\}$$

$$\{R\} = \{F_s\} - \{F_{ext}\}_s - \{F_{equiv}\}_s$$

Finalmente, se calcularon las fuerzas elementales con la relación Fuerza-Desplazamiento.

4.1.1.5. Resultados

Al ejecutar el programa desarrollado se obtuvieron los siguientes resultados:

- **Desplazamientos Nodales**

Tabla 12: Desplazamientos Nodales Ejemplo A1.

Nodo	UCAS2D			SAP2000		
	Ux (cm)	Uy (cm)	Uz (cm)	Ux (cm)	Uy (cm)	Uz (cm)
1	5	0	0	5	0	0
2	5.0145	-11.1339	0	5.0145	-11.1339	0
3	5.0265	-11.1317	0	5.0265	-11.1317	0
4	5.0300	0	0	5.0300	0	0
5	4.9560	-11.1618	0	4.9560	-11.1618	0
6	5.0197	-11.1379	0	5.0197	-11.1379	0
7	5.0844	-11.1579	0	5.0844	-11.1579	0

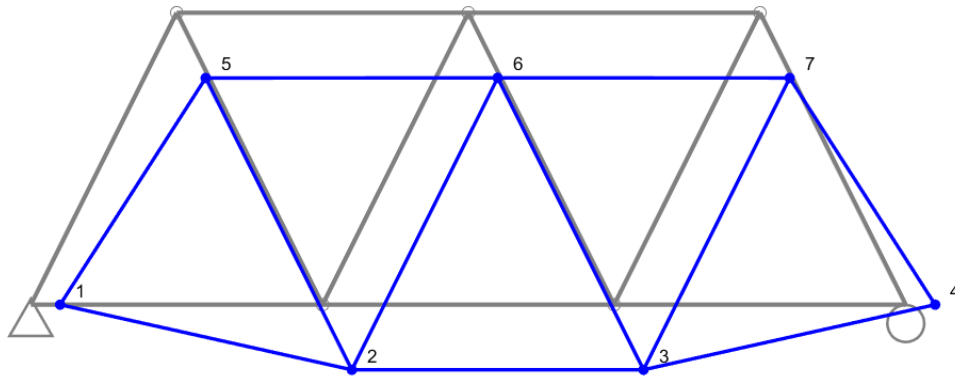


Figura 46: Desplazamientos Ejemplo A1 (UCAS2D).

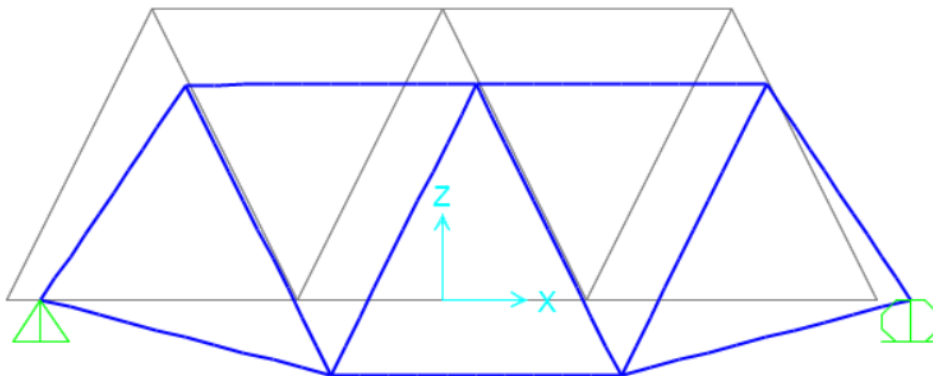


Figura 47: Desplazamientos Ejemplo A1 (Computers and Structures, Inc., 2017).

- **Reacciones en los apoyos**

Tabla 13: Reacciones en apoyos Ejemplo A1.

Nodo	UCAS2D		SAP2000	
	Rx (Tonf)	Ry (Tonf)	Rx (Tonf)	Ry (Tonf)
1	-4.0	1.6667	-4.0	1.6667
4	---	2.3333	-----	2.3333

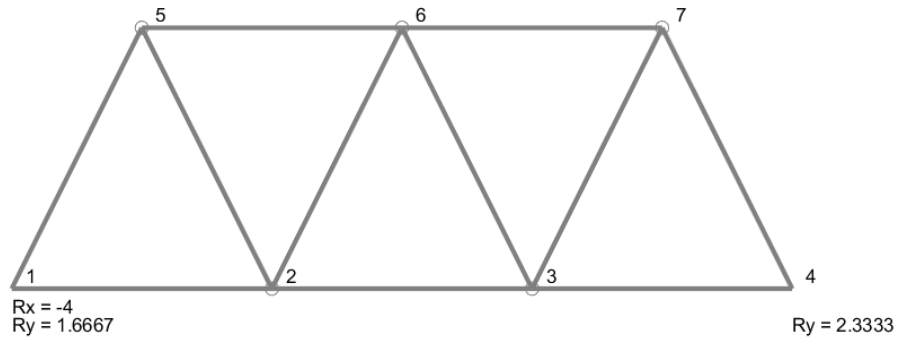


Figura 48: Reacciones en apoyos Ejemplo A1 (UCAS2D).

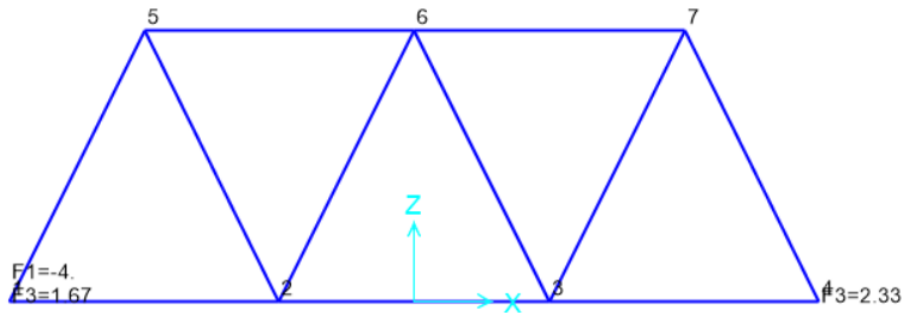


Figura 49: Reacciones Ejemplo A1 (Computers and Structures, Inc., 2017).

- **Fuerzas Elementales Globales:** Las estructuras tipo armadura solo trabajan axialmente, por ende, las cargas elementales en coordenadas globales existen en dirección del eje X y Y como se detallan a continuación:

Tabla 14: Fuerzas Elementales Globales Ejemplo A1.

Elemento	UCAS2D				SAP2000			
	Nodo Inicial		Nodo Final		Nodo Inicial		Nodo Final	
	Fx (Tonf)	Fy (Tonf)	Fx (Tonf)	Fy (Tonf)	Fx (Tonf)	Fy (Tonf)	Fx (Tonf)	Fy (Tonf)
1	-4.8333	0	4.8333	0	-4.8333	0	4.8333	0
2	-5.5	0	2.5	0	-5.5	0	2.5	0
3	-1.1667	0	1.1667	0	-1.1667	0	1.1667	0
4	0.8333	1.6667	-0.8333	-1.6667	0.8333	1.6667	-0.8333	-1.6667
5	2.1667	0	-2.1667	0	2.1667	0	-2.1667	0
6	1.8333	0	-1.8333	0	1.8333	0	-1.8333	0
7	1.1667	-2.3333	-1.1667	2.3333	1.1667	-2.3333	-1.1667	2.3333
8	-0.3333	0.6667	0.3333	-0.6667	-0.3333	0.6667	0.3333	-0.6667

9	0.6667	-1.3333	-0.6667	1.3333	0.6667	-1.3333	-0.6667	1.3333
10	0.3333	0.6667	-0.3333	-0.6667	0.3333	0.6667	-0.3333	-0.6667
11	-0.6667	-1.3333	0.6667	1.3333	-0.6667	-1.3333	0.6667	1.3333

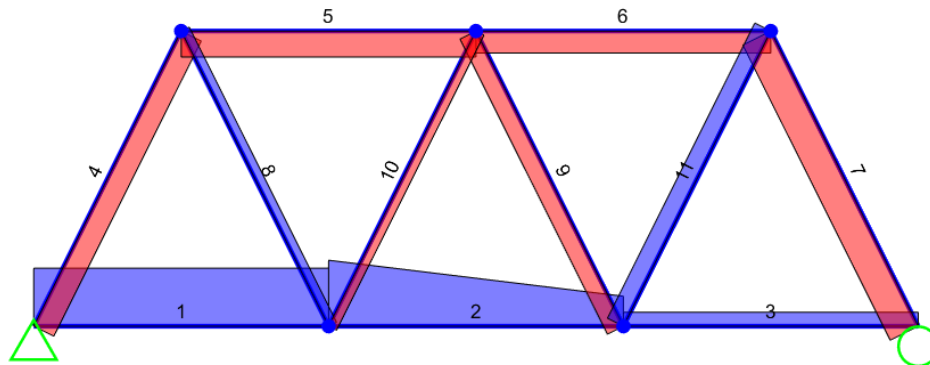


Figura 50: Esfuerzos Axiales Ejemplo A1 (UCAS2D).

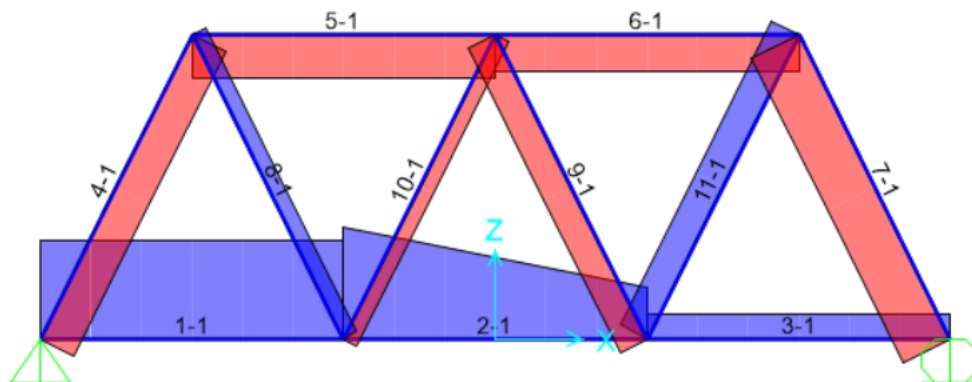


Figura 51: Esfuerzos Ejemplo A1 (Computers and Structures, Inc., 2017).

Al comparar los resultados presentados en la Tabla 12, Tabla 13 y Tabla 14, se observó que los desplazamientos nodales, reacciones en apoyos y fuerzas elementales son exactamente las mismas. Además, las figuras generadas por los programas UCAS2D y SAP2000 presentaron congruencia.

4.1.2. Ejemplo A2: Armaduras en 2D Análisis No-Lineal

En este ejemplo se desarrolló el análisis estático no-lineal de la armadura en 2D mostrada en la Figura 52. A la armadura se le aplicó una carga concentrada incremental en el nodo de control.

4.1.2.1. Material y Sección

Para la estructura en análisis se utilizó Acero A572 Grado 50 con las siguientes propiedades:

Tabla 15: Propiedades del Acero A572 Gr 50.

Acero A572 Gr50

Propiedad	Valor	Unidad
Módulo de Elasticidad (E)	2038.9019	Tonf/cm ²
Coefficiente de Poisson	0.3	
Coefficiente de Expansión Térmica	1.17E-05	1/C°
Módulo de Corte	784.193	Tonf/cm ²
Esfuerzo de Fluencia	3.5153	Tonf/cm ²

Dos secciones sólidas rectangulares fueron modeladas, la primera fue asignada a los elementos horizontales y la segunda a los elementos verticales y diagonales. Las dimensiones de las secciones se muestran a continuación:

Tabla 16: Propiedades de la Sección Ejemplo A2.

<i>Etiqueta</i>	<i>Altura (cm)</i>	<i>Base (cm)</i>	<i>Tipo</i>	<i>Material</i>
<i>SR 5x5</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>Sección sólida rectangular</i>	<i>A572 Gr50</i>
<i>SR 10x10</i>	<i>10</i>	<i>10</i>	<i>Sección sólida rectangular</i>	<i>A572 Gr50</i>

Para este ejemplo se consideró una degradación del 1% en el comportamiento plástico del material (Figura 2a).

$$E_p = 0.01 \times E$$

4.1.2.2. Tabla de Nodos y Conectividad

Para identificar los nodos de la estructura se definió las coordenadas y las restricciones de cada uno de ellos, la misma que se muestra a continuación:

Tabla 17: Tabla de Nodos Ejemplo A2.

<i>Nº Nodo</i>	<i>X (cm)</i>	<i>Y (cm)</i>	<i>Restricción</i>
<i>1</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>Articulado</i>
<i>2</i>	<i>200</i>	<i>0</i>	<i>Libre</i>
<i>3</i>	<i>400</i>	<i>0</i>	<i>Libre</i>
<i>4</i>	<i>600</i>	<i>0</i>	<i>Libre</i>
<i>5</i>	<i>800</i>	<i>0</i>	<i>Apoyado en Y</i>
<i>6</i>	<i>200</i>	<i>200</i>	<i>Libre</i>
<i>7</i>	<i>400</i>	<i>200</i>	<i>Libre</i>
<i>8</i>	<i>600</i>	<i>200</i>	<i>Libre</i>

Para identificar la conectividad y las propiedades asociadas a cada elemento se generó la tabla de conectividad, la misma que se muestra a continuación:

Tabla 18: Tabla de Conectividad Ejemplo A2.

<i>Nº Elemento</i>	<i>Nodo Inicial</i>	<i>Nodo Final</i>	<i>Sección</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>SR 5x5</i>
<i>2</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>SR 5x5</i>
<i>3</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>SR 5x5</i>
<i>4</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>SR 5x5</i>
<i>5</i>	<i>1</i>	<i>6</i>	<i>SR 10x10</i>
<i>6</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>SR 5x5</i>
<i>7</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>SR 5x5</i>
<i>8</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>SR 10x10</i>
<i>9</i>	<i>6</i>	<i>2</i>	<i>SR 10x10</i>
<i>10</i>	<i>7</i>	<i>3</i>	<i>SR 10x10</i>
<i>11</i>	<i>8</i>	<i>4</i>	<i>SR 10x10</i>
<i>12</i>	<i>2</i>	<i>7</i>	<i>SR 10x10</i>
<i>13</i>	<i>7</i>	<i>4</i>	<i>SR 10x10</i>

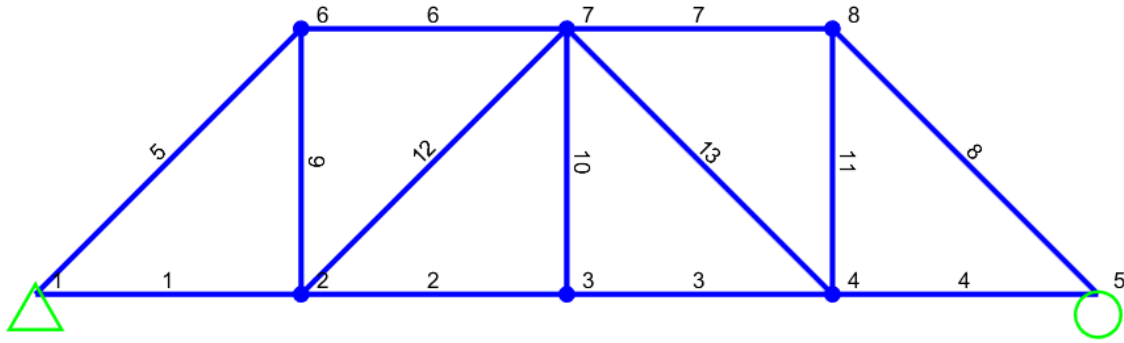


Figura 52: Ejemplo Armadura en 2D Análisis No-Lineal.

4.1.2.3. Cargas

Para el análisis no-lineal se aplicó una carga puntual incremental en el nodo de control, para este ejemplo el nodo de control fue el N°6.

4.1.2.4. Método de los Desplazamientos

Matrices de Rigideces Elementales Globales: Los elementos con idéntico material, sección, longitud y orientación tienen la misma matriz de rigidez. Las matrices de rigideces calculadas para cada elemento fueron las siguientes:

$$k_{G1} = k_{G2} = k_{G3} = k_{G4} = k_{G6} = k_{G7} = \begin{bmatrix} 1019.45 & 0 & 0 & -1019.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1019.45 & 0 & 0 & 1019.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{G5} = k_{G12} = \begin{bmatrix} 360.43 & 360.43 & 0 & -360.43 & -360.43 & 0 \\ 360.43 & 360.43 & 0 & -360.43 & -360.43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -360.43 & -360.43 & 0 & 360.43 & 360.43 & 0 \\ -360.43 & -360.43 & 0 & 360.43 & 360.43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{G9} = k_{G10} = k_{G11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1019.45 & 0 & 0 & -1019.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1019.45 & 0 & 0 & 1019.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{G8} = k_{G13} = \begin{bmatrix} 360.43 & -360.43 & 0 & -360.43 & 360.43 & 0 \\ -360.43 & 360.43 & 0 & 360.43 & -360.43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -360.43 & 360.43 & 0 & 360.43 & -360.43 & 0 \\ 360.43 & -360.43 & 0 & -360.43 & 360.43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices de Rigidez General: Luego de la obtención de las matrices de rigideces en ejes globales se realizó la combinación de matrices, con lo cual se determinó la matriz de rigidez general, la misma que se muestra en el Anexo 3. Para este caso la estructura tenía 8 nodos lo que implicaba 24 GDL, la matriz de rigidez general tenía dimensiones de 24x24.

Partición de la Matriz: Como se detalla en la sección 3.1.4, la partición comenzó con la determinación de los GDLs y GDLp. Como se analizó una estructura tipo armadura, los GDL respectivos a la rotación fueron eliminados, con lo cual se facilitó el cálculo computacional.

$$GDLs = \{1 \ 2 \ 13 \ 14\}$$

$$GDLp = \{4 \ 5 \ 7 \ 8 \ 10 \ 11 \ 16 \ 17 \ 19 \ 20 \ 22 \ 23\}$$

Posteriormente se realizó la partición

$$\begin{Bmatrix} \{F_p\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{ps}] \\ [K_{sp}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_p\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix}$$

y se obtuvo las siguientes matrices K_{pp} , K_{ps} , K_{sp} y K_{ss} .

Carga Unitaria por Eventos (proceso iterativo): Los desplazamientos fueron calculados por medio de la Ecuación 11, teniendo en cuenta que el vector F_p es nulo excepto en el GDL en la dirección x correspondiente al nodo N°6.

$$\{u_p\} = [K_{pp}]^{-1} \times (\{F_p\} - [K_{ps}]\{u_s\})$$

Posteriormente, se calculó las fuerzas elementales por medio de las relaciones *Fuerza-Desplazamiento* elementales, con las cuales se determinó las fuerzas que hacen fluir a cada elemento.

Finalmente, se encontró la fuerza mínima de fluencia entre todos los elementos y nuevamente se calculó los desplazamientos generados por esta fuerza de fluencia, y así, un punto de la curva Pushover fue obtenido.

El proceso se volvió a realizar con la sustitución del módulo de elasticidad del elemento que fluyó por un módulo de elasticidad correspondiente a la degradación en el comportamiento plástico del material y con la consideración de la carga aplicada anteriormente.

4.1.2.5. Resultados

Al ejecutar el programa desarrollado se obtuvieron los siguientes resultados:

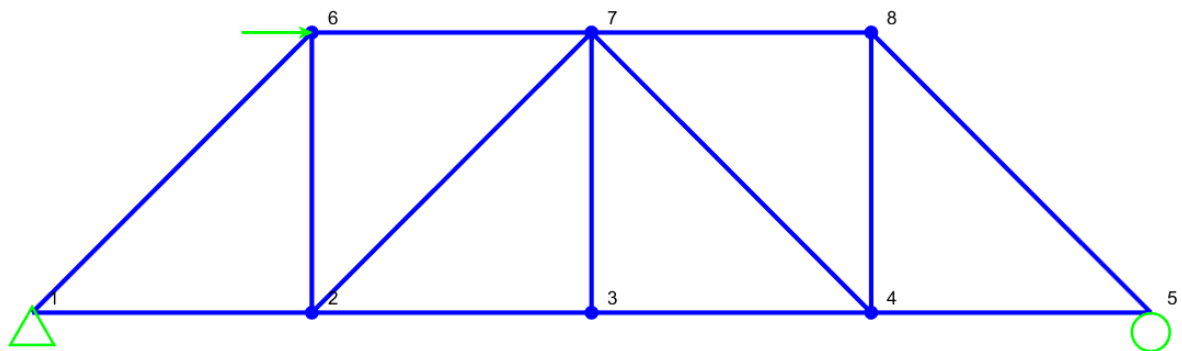


Figura 53: Modelo Ejemplo A2 (UCAS2D).

- Curva Pushover**

Tabla 19: Datos Pushover Ejemplo A2 (UCAS2D).

Iteración	UCAS2D		OpenSees	
	Desplazamiento (cm)	Carga (Tonf)	Desplazamiento (cm)	Carga (Tonf)
0	0	0	0	0
1	0.9002	117.177	0.9002	117.173
2	26.9534	175.765	26.9534	175.765

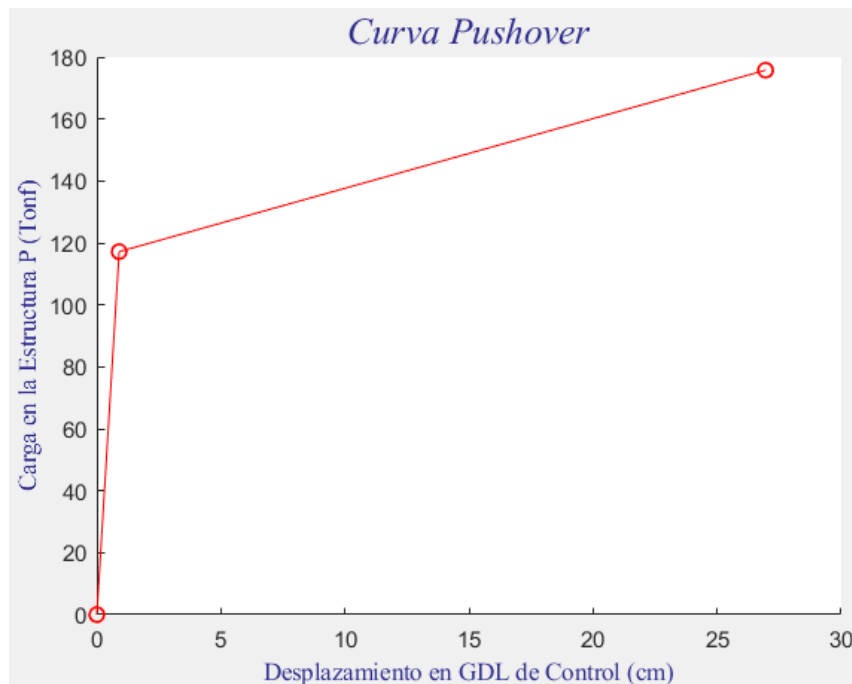


Figura 54: Curva Pushover Ejemplo A2 (UCAS2D).

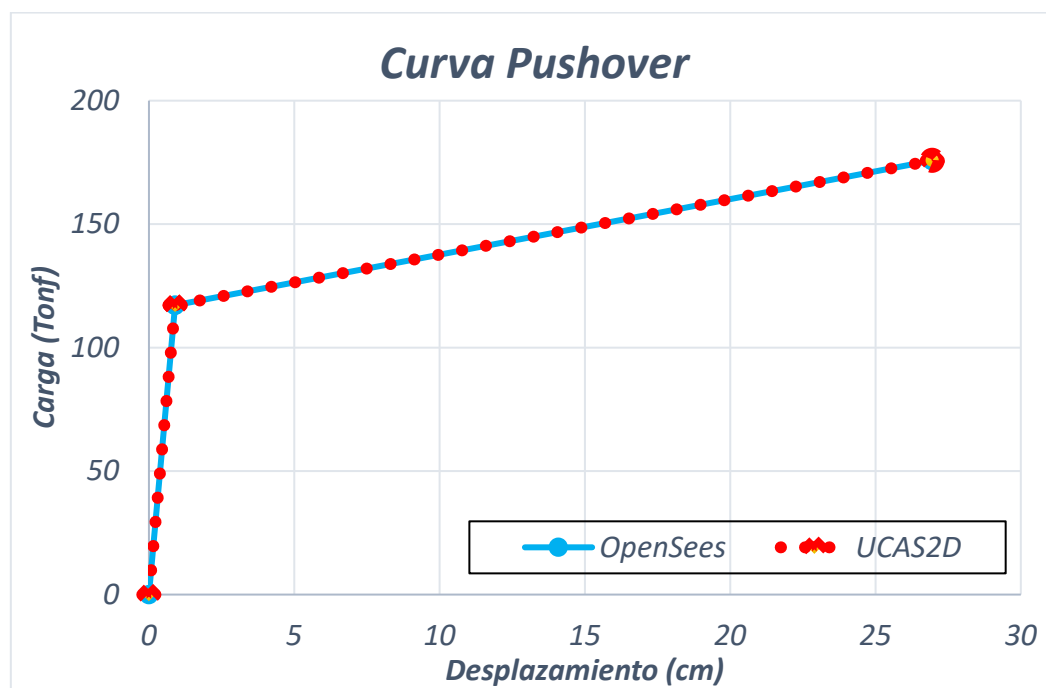


Figura 55: Comparación de los resultados obtenidos con OpenSees y UCAS2D.

Los puntos de la curva Pushover generadas por UCAS2D y OpenSees son mostrados en la Tabla 19, se observó que los valores numéricos son similares, aunque existe una pequeña variación por la aproximación de decimales. Además, al superponer ambas curvas determinadas (Figura 55) demostraron congruencia.

4.2. Ejemplos Académicos de Pórticos en 2D

4.2.1. Ejemplo P1: Pórticos en 2D Análisis Lineal

A continuación, se procedió a comparar un ejercicio resuelto en el programa SAP2000 y en el programa UCAS2D. En este ejemplo se desarrolló el análisis estático lineal de una estructura en 2D. La estructura consistió en un pórtico de un piso y de un vano, arriostrado mediante un elemento armadura ubicado diagonalmente como se muestra en la Figura 56.

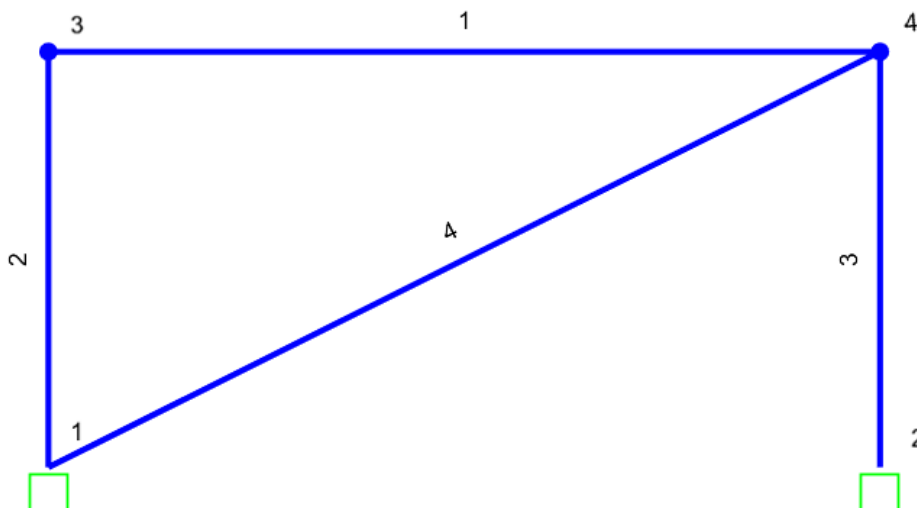


Figura 56: Ejemplo de un análisis lineal de un pórtico en 2D.

4.2.1.1. Material y Sección

Para la estructura en análisis se utilizó el mismo material que se evaluó en la sección de armaduras Acero A36.

Para las secciones se utilizó perfiles del AISC, para las columnas se empleó el perfil W24x94, y la viga con sección de perfil W18x35. El elemento armadura fue modelada con una sección sólida cuadrada de lado de 8 cm. Las dimensiones de las secciones se muestran a continuación:

Tabla 20: Propiedades de la Sección Ejemplo P1.

Sección	Área (cm ²)	Inercia x-x (cm ⁴)	Tipo	Material
W24x94	178.7093	112382	Perfil W	A36
W18x35	66.4515	21228	Perfil W	A36
B8x8	64.0000	341	Sección sólida	A36

4.2.1.2. Tabla de Nodos y Conectividad

Para identificar los nodos de la estructura se especificó las coordenadas y restricciones de cada uno por medio de la siguiente tabla:

Tabla 21: Tabla de Nodos Ejemplo P1.

Nº Nudo	X (cm)	Y (cm)	Restricción
1	0	0	Empotrado
2	600	0	Empotrado
3	0	300	Libre
4	600	300	Libre

Para identificar la conectividad y las propiedades asociadas a cada elemento se generó la tabla de conectividad. En el Elemento 1 se colocó una articulación en el Nodo Inicial, lo cual restringió el paso de momento por ese nodo, esto se representa en la Tabla 22.

Tabla 22: Tabla de Conectividad Ejemplo P1.

Nº Elemento	Nodo Inicial (NI)	Nodo Final (NF)	Sección	Releases
1	3	4	W18x35	M (NI)
2	1	3	W24x94	Ninguno
3	2	4	W24x94	Ninguno
4	1	4	B8x8	Ninguno

4.2.1.3. Tabla de Cargas

Las cargas asignadas fueron una fuerza nodal y el resto cargas no-nodales. En el Nodo 3 se aplicó una fuerza concentrada de 15 Tnf, y en el Nodo 1 (apoyo) se produjo un desplazamiento inicial de 5 cm lo que simulaba un asentamiento, como se muestra en la Tabla 23.

Tabla 23: Tabla de Cargas en Nodos Ejemplo P1.

Nodo	F. Nodales		Desp. Inicial	
Nº	Fx (Tonf)	Fy (Tonf)	Ux (cm)	Uy (cm)
1	0	0	0	-5
3	15	0	0	0

Para el ejemplo en análisis se asignó: cargas no-nodales (carga distribuida axial W_x y carga distribuida perpendicular W_y), cargas por cambios de temperatura (ΔT) y fuerzas concentradas en el interior de un elemento (perpendicular P_y) en coordenadas locales. La tabla de cargas en los elementos se muestra a continuación:

Tabla 24: Tabla de Coordenadas de Nodos Ejemplo P1.

Nº Elemento	W_x (Tonf/cm)	W_y (Tonf/cm)	ΔT (°C)	P_y (Tonf)
1	0	-1	0	0
2	-0.1	0	0	0
3	0	0	0	-5 (en $L_3/2$)
4	0	0	25	0

4.2.1.4. Método de los Desplazamientos

Matrices de Rigideces Elementales Globales (k_{Gi}): Los elementos con idéntico material, sección, longitud y orientación tienen la misma matriz de rigidez. Las matrices de rigideces calculadas para cada elemento fueron las siguientes:

$$k_{G1} = \begin{bmatrix} 225.81 & 0 & 0 & -225.81 & 0 & 0 \\ 0 & 0.60 & 0 & 0 & -0.60 & 360.68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -225.81 & 0 & 0 & 225.81 & 0 & 0 \\ 0 & -0.60 & 0 & 0 & 0.60 & -360.68 \\ 0 & 360.68 & 0 & 0 & -360.68 & 216409.05 \end{bmatrix}$$

$$k_{G2} = k_{G3} = \begin{bmatrix} 101.84 & 0 & -15275.72 & -101.84 & 0 & -15275.72 \\ 0 & 1214.57 & 0 & 0 & -1214.57 & 0 \\ -15275.72 & 0 & 3055144.98 & 15275.72 & 0 & 15275.72 \\ -101.84 & 0 & 15275.72 & 101.84 & 0 & 15275.72 \\ 0 & -1214.57 & 0 & 0 & 1214.57 & 0 \\ -15275.72 & 0 & 15275.72 & 15275.72 & 0 & 3055144.98 \end{bmatrix}$$

$$k_{G4} = \begin{bmatrix} 155.62 & 77.81 & 0 & -155.62 & -77.81 & 0 \\ 77.81 & 38.90 & 0 & -77.81 & -38.90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -155.62 & -77.81 & 0 & 155.62 & 77.81 & 0 \\ -77.81 & -38.90 & 0 & 77.81 & 38.90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices de Rigidez General (K): Similar al ejemplo A1 de armaduras se realizó la combinación de matrices, con lo cual se determinó la matriz de rigidez general, la misma que se muestra en el Anexo 4. En este caso, la estructura se constituía de cuatro nodos lo que involucraba 12 GDL, por lo tanto, la matriz de rigidez general tenía una dimensión de 12x12.

Partición de la Matriz: Se determinó los GDLs y GDLp de la siguiente manera:

$$GDLs = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6\}$$

$$GDLp = \{7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12\}$$

Posteriormente se realizó la partición

$$\begin{Bmatrix} \{F_p\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{ps}] \\ [K_{sp}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_p\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix}$$

y se obtuvo las siguientes matrices K_{pp} , K_{ps} , K_{sp} y K_{ss} .

$$K_{pp} = \begin{bmatrix} 327.65 & 0 & 15275.72 & -225.81 & 0 & 0 \\ 0 & 1215.17 & 0 & 0 & -0.60 & 360.68 \\ 15275.72 & 0 & 3055144.98 & 0 & 0 & 0 \\ -225.81 & 0 & 0 & 483.27 & 77.81 & 15275.72 \\ 0 & -0.60 & 0 & 77.81 & 1254.07 & -360.68 \\ 0 & 360.68 & 0 & 15275.72 & -360.68 & 3271554.03 \end{bmatrix}$$

$$K_{ps} = \begin{bmatrix} -101.84 & 0 & 15275.72 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1214.57 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15275.72 & 0 & 1527572.49 & 0 & 0 & 0 \\ -155.62 & -77.81 & 0 & -101.84 & 0 & 15275.72 \\ -77.81 & -38.90 & 0 & 0 & -1214.57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15275.72 & 0 & 1527572.49 \end{bmatrix}$$

$$K_{sp} = \begin{bmatrix} -101.84 & 0 & -15275.72 & -155.62 & -77.81 & 0 \\ 0 & -1214.57 & 0 & -77.81 & -38.90 & 0 \\ 15275.72 & 0 & 1527572.49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -101.84 & 0 & -15275.72 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1214.57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15275.72 & 0 & 1527572.49 \end{bmatrix}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 257.46 & 77.81 & -15275.72 & 0 & 0 & 0 \\ 77.81 & 1253.47 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15275.72 & 0 & 3055144.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 101.84 & 0 & -15275.72 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1214.57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15275.72 & 0 & 3055144.98 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos Desconocidos y Reacciones: Estos resultados se obtuvieron por medio de la Ecuación 11, Ecuación 10 y Ecuación 12.

$$\{u_p\} = [K_{pp}]^{-1} \times (\{F_p\} - [K_{ps}]\{u_s\})$$

$$\{F_s\} = [K_{sp}]\{u_p\} + [K_{ss}]\{u_s\}$$

$$\{R\} = \{F_s\} - \{F_{ext}\}_s - \{F_{Equiv}\}_s$$

Finalmente se calcularon las fuerzas elementales con la relación *Fuerza-Desplazamiento*.

4.2.1.5. Resultados

Para la validación del programa UCAS2D se utilizó el programa SAP2000. Cabe indicar que la convención de signos utilizada en UCAS2D para momentos flectores y desplazamientos rotacionales (giros) es contraria a la empleada por SAP2000. Luego, al ejecutar el análisis planteado en ambos programas se obtuvieron los siguientes resultados:

- **Desplazamientos Nodales:**

Tabla 25: Desplazamientos Nodales Ejemplo P1.

Nodo	UCAS2D			SAP2000		
	Ux (cm)	Uy (cm)	Uz (rad)	Ux (cm)	Uy (cm)	Uz (rad)
1	0	-5	0	0	-5	0
2	0	0	0	0	0	0
3	-2.2481	-5.2030	0.0112	-2.2481	-5.2030	-0.0112
4	-2.5680	-0.2761	0.0263	-2.5680	-0.2761	-0.0263

Las configuraciones de la deformada para la estructura obtenidas mediante los programas UCAS2D y SAP2000 se visualizan en la Figura 57.

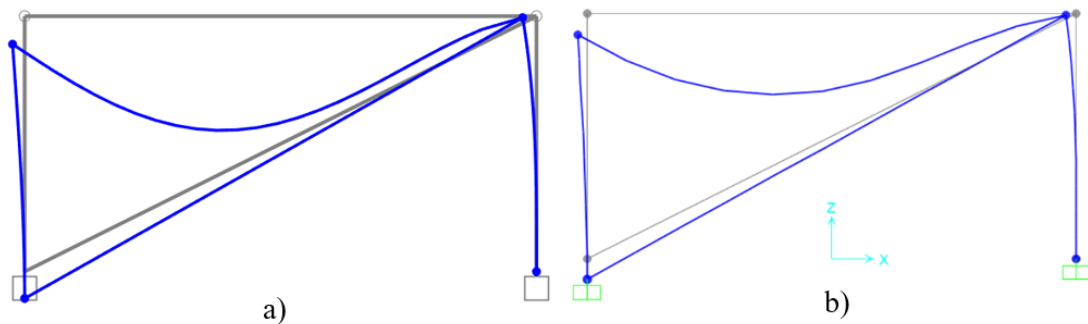


Figura 57: Deformada de la Estructura Ejemplo P1, a) UCAS2D, b) SAP2000 (Computers and Structures, Inc., 2017).

- **Reacciones en los apoyos:**

Tabla 26: Reacciones en apoyos Ejemplo P1.

Nodo	UCAS2D			SAP2000		
	Rx (Tonf)	Ry (Tonf)	Rz (Tonf-cm)	Rx (Tonf)	Ry (Tonf)	Rz (Tonf-cm)
1	123.44	294.64	-17170.55	123.44	294.64	17170.61
4	-143.44	335.36	1205.20	-143.44	335.36	-1205.15

- **Fuerzas Elementales Globales:** Las estructuras tipo armadura, no trabajan a flexión, por lo tanto, no genera momento ($F_z = 0$). De igual manera, la articulación ubicada en el nodo 3 no transmite momento ($F_z = 0$). Al considerar lo anterior, las fuerzas elementales en coordenadas globales de la estructura se detallan a continuación:

Tabla 27: Fuerzas Elementales Globales Ejemplo P1.

Elemento	UCAS2D			SAP2000		
	Fx (Tonf)	Fy (Tonf)	Fz (Tonf - cm)	Fx (Tonf)	Fy (Tonf)	Fz (Tonf - cm)
<i>Nodo Inicial</i>						
1	72.24	231.54	0	72.24	231.54	0
2	57.24	261.54	-17170.55	57.24	261.54	17170.61
3	-143.44	335.36	-1205.20	-143.44	335.36	-1205.15
4	66.20	33.10	0	66.20	33.10	0
<i>Nodo Final</i>						
1	-72.24	368.46	-41075.53	-72.24	368.46	41075.58
2	-57.24	-231.54	0	-57.24	-231.54	0
3	138.44	-335.36	41075.53	138.44	-335.36	-41075.58
4	-66.20	-33.10	0	-66.20	-33.10	0

Las gráficas de fuerza axial obtenida de UCAS2D y SAP2000, se presentan en la Figura 58 y Figura 59, respectivamente. Se observó que ambos programas indicaron la compresión de todos los elementos, sin embargo, las gráficas de los elementos verticales se distinguían entre sí.

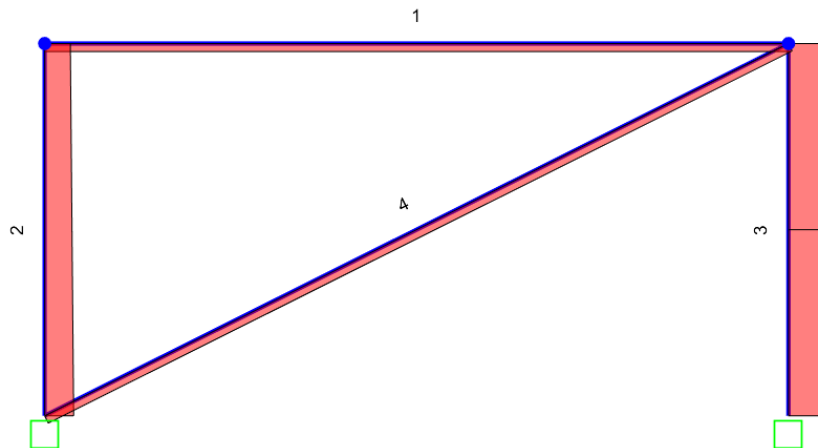


Figura 58: Gráfico de fuerza axial Ejemplo P1 (UCAS2D).

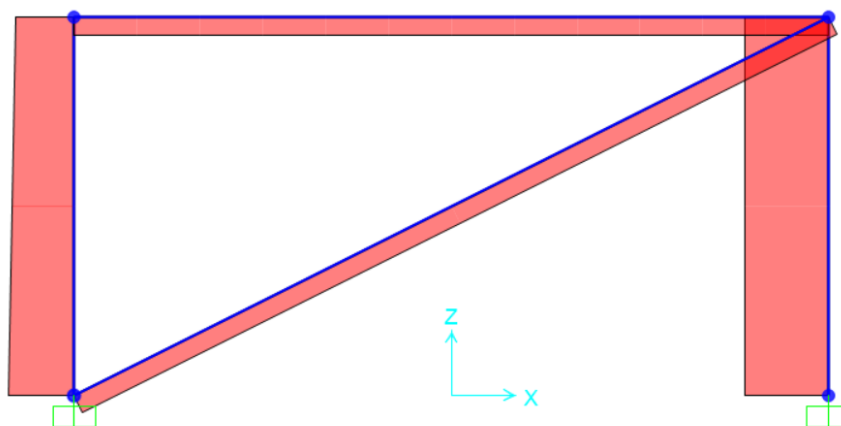


Figura 59: Gráfico de fuerza axial Ejemplo P1 (Computers and Structures, Inc., 2017).

Las gráficas de fuerza cortante obtenida de UCAS2D y SAP2000, se presentan en la Figura 60 y Figura 61, respectivamente. Se observó que la convención de signos en los programas fueron diferentes en todos los elementos.

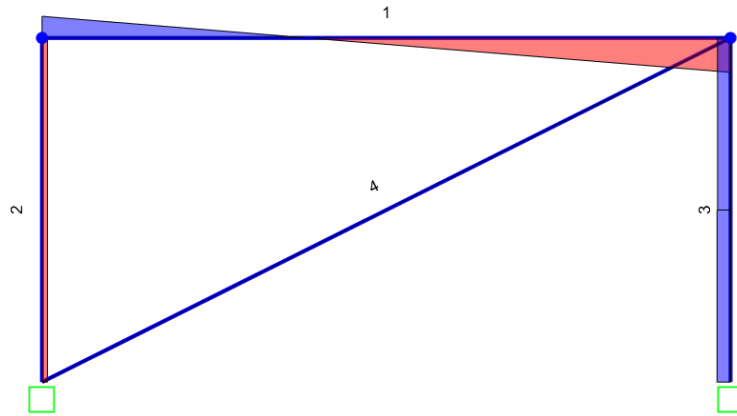


Figura 60: Gráfico de fuerza cortante Ejemplo P1 (UCAS2D).

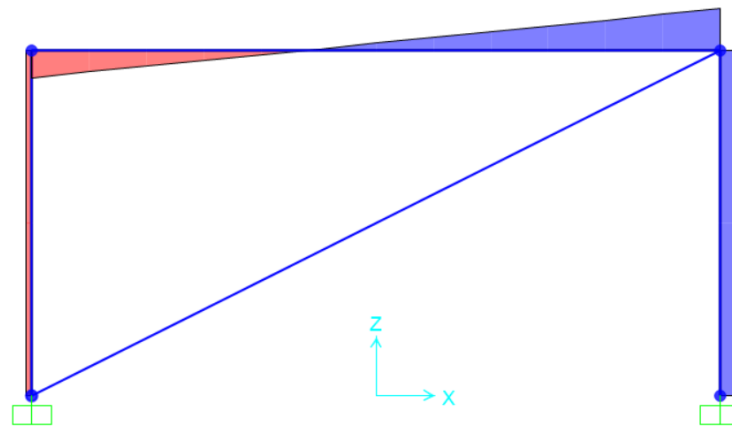


Figura 61: Gráfico de fuerza cortante Ejemplo P1 (Computers and Structures, Inc., 2017).

Las gráficas de momento flector obtenida de UCAS2D y SAP2000, se presentan en la Figura 62 y Figura 63, respectivamente. En el primer programa los valores positivos fueron identificados de color rojo, a diferencia de las anteriores gráficas, en las cuales los valores positivos de la fuerza axial y cortante fueron identificados de color azul. Se observó que las gráficas presentaron gran similitud, sin embargo, las gráficas de los elementos verticales (columnas) se distinguían entre sí.

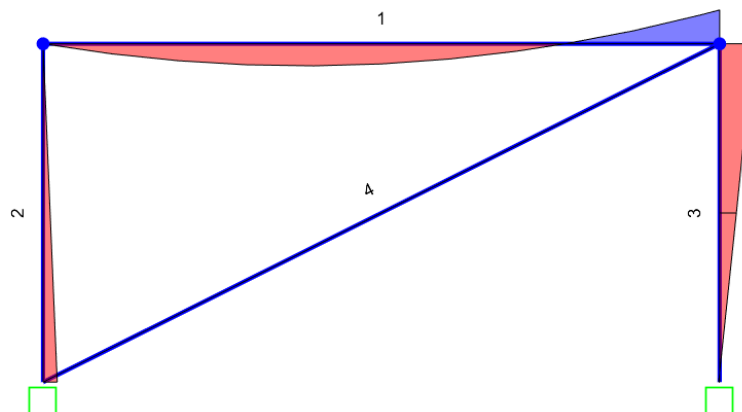


Figura 62: Gráfico de momento flector Ejemplo P1 (UCAS2D).

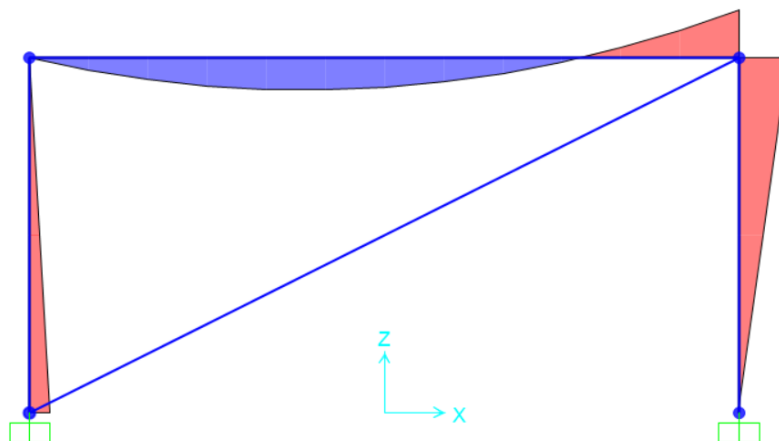


Figura 63: Gráfico de momento flector Ejemplo P1 (Computers and Structures, Inc., 2017).

4.2.2. Ejemplo P2: Pórticos en 2D Análisis No-Lineal

A continuación, se procedió a comparar un ejercicio resuelto en el programa OpenSees y en el programa UCAS2D. En este ejemplo se desarrolló el análisis estático no-lineal de una estructura en 2D. La estructura consistió en un pórtico de dos pisos y dos vanos como se observa en la Figura 64. En el programa desarrollado UCAS2D se procedió con la metodología explicada en la sección 3.7.1, la cual describe que en la estructura se aplique una carga concentrada, y posteriormente se incrementa de acuerdo con la formación de las rótulas plásticas.

4.2.2.1. Material y Sección

Para la estructura en análisis se utilizó el mismo material que se evaluó en la sección de armaduras Acero A572 Gr 50, con la diferencia que los valores de módulo de elasticidad $E = 2100 \text{ Tonf/cm}^2$ y esfuerzo de fluencia $F_y = 3.5 \text{ Tonf/cm}^2$.

Tabla 28: Propiedades de la Sección Ejemplo P2.

Etiqueta	Área (cm^2)	Inercia (cm^4)	Modulo Plástico (cm^3)	Tipo	Sección
W27x102	193.55	150676	4998.05	Perfil W	A572 Gr50
W24x94	178.71	112382	4162.31	Perfil W	A572 Gr50
W18x40	76.13	25473	1284.75	Perfil W	A572 Gr50

Para las secciones se utilizó perfiles del AISC, para las columnas del primer piso se utilizó el perfil W27x102, para las columnas del segundo piso se utilizó el perfil W24x94 y las vigas con sección de perfil W18x40. Las dimensiones de las secciones se muestran a continuación:

En este ejemplo no se consideró una degradación en el comportamiento plástico del material (Figura 2.a), por lo tanto,

$$K_{su} = 0$$

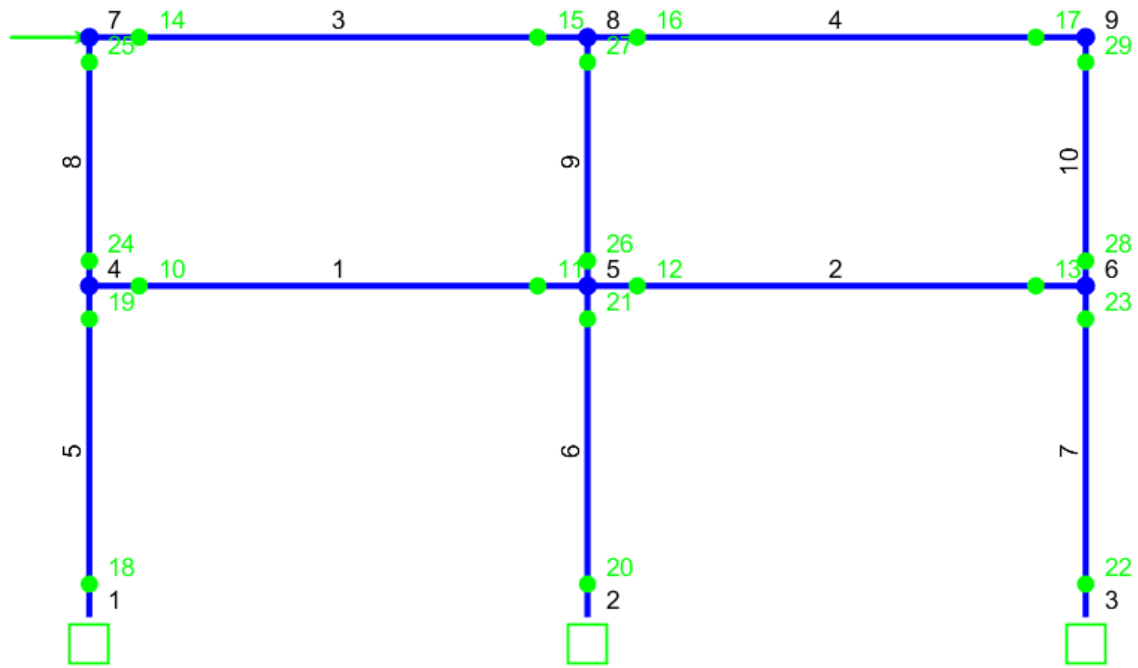


Figura 64: Ejemplo de un análisis no-lineal de un pórtico en 2D.

4.2.2.2. Tabla de Nodos y Conectividad

Para identificar los nodos de la estructura se especificó las coordenadas y restricciones de cada uno ellos mediante la siguiente tabla:

Tabla 29: Tabla de Nodos Ejemplo P2.

Nº Nudo	X (cm)	Y (cm)	Restricción
1	0	0	Empotrado
2	600	0	Empotrado
3	1200	0	Empotrado
4	0	400	Libre
5	600	400	Libre
6	1200	400	Libre
7	0	700	Libre
8	600	700	Libre
9	1200	700	Libre

Se vinculó los elementos y se asignó secciones a cada uno de ellos mediante la tabla de conectividad que se observa en la Tabla 30.

Tabla 30: Tabla de Conectividad Ejemplo P2.

Nº Elemento	Nodo Inicial	Nodo Final	Sección
1	4	5	W18x40
2	5	6	W18x40
3	7	8	W18x40
4	8	9	W18x40

5	1	4	W27x102
6	2	5	W27x102
7	3	6	W27x102
8	4	7	W24x94
9	5	8	W24x94
10	6	9	W24x94

Además, se incorporó elementos que representen las rótulas plásticas, para ello, fue necesario que se agreguen otros nodos que interpreten la división de los elementos iniciales. Estos nodos se encontraban en las mismas coordenadas de los nodos iniciales, debido a que las rótulas, se modelaron como elementos de longitud cero en los extremos de las vigas y columnas. La tabla de nodos que se incorporó por las rótulas plásticas se presenta en la Tabla 31.

Tabla 31: Tabla de Nodos Adicional Ejemplo P2.

Etiqueta del Nodo	X (cm)	Y (cm)	Ubicación respecto a la unión (Nodo)
R1	0	400	Derecha (4)
R2	600	400	Derecha (5)
R3	0	700	Derecha (7)
R4	600	700	Derecha (8)
R5	0	0	Arriba (1)
R6	600	0	Arriba (2)
R7	1200	0	Arriba (3)
R8	0	400	Arriba (4)
R9	600	400	Arriba (5)
R10	1200	400	Arriba (6)
R12	600	400	Izquierda (5)
R14	1200	400	Izquierda (6)
R16	600	700	Izquierda (8)
R18	1200	700	Izquierda (9)
R20	0	400	Debajo (4)
R22	600	400	Debajo (5)
R24	1200	400	Debajo (6)
R26	0	700	Debajo (7)
R28	600	700	Debajo (8)
R30	1200	700	Debajo (9)

La tabla de conectividad que se incorporó por las rótulas plásticas se presenta en la Tabla 32.

Tabla 32: Tabla de Conectividad Adicional Ejemplo P2.

Etiqueta del Elemento	Nodo Inicial	Nodo Final	Sección
R1	4	R1	W18x40
R2	5	R2	W18x40
R3	7	R3	W18x40
R4	8	R4	W18x40
R5	1	R5	W27x102
R6	2	R6	W27x102
R7	3	R7	W27x102
R8	4	R8	W24x94
R9	5	R9	W24x94
R10	6	R10	W24x94
R12	5	R12	W18x40
R14	6	R14	W18x40
R16	8	R16	W18x40
R18	9	R18	W18x40
R20	4	R20	W27x102
R22	5	R22	W27x102
R24	6	R24	W27x102
R26	7	R26	W24x94
R28	8	R28	W24x94
R30	9	R30	W24x94

4.2.2.3. Cargas

Para el análisis no-lineal se aplicó una carga concentrada incremental en el nodo de control, para este ejemplo el nodo de control fue el N°7.

4.2.2.4. Método de los Desplazamientos

Matrices de Rigideces Elementales Globales: Los elementos con idéntico material, sección, longitud y orientación tienen la misma matriz de rigidez. Las matrices de rigideces calculadas para cada elemento fueron las siguientes:

$$k_{G1} = k_{G2} = k_{G3} = k_{G4} = \begin{bmatrix} 266.45 & 0 & 0 & -266.45 & 0 & 0 \\ 0 & 2.97 & 891.55 & 0 & -2.97 & 891.55 \\ 0 & 891.55 & 356621.99 & 0 & -891.55 & 178310.99 \\ -266.45 & 0 & 0 & 266.45 & 0 & 0 \\ 0 & -2.97 & -891.55 & 0 & 2.97 & -891.55 \\ 0 & 891.55 & 178310.99 & 0 & -891.55 & 356621.99 \end{bmatrix}$$

$$k_{G5} = k_{G6} = k_{G7} = \begin{bmatrix} 59.33 & 0 & -11865.73 & -59.33 & 0 & -11865.73 \\ 0 & 1016.13 & 0 & 0 & -1016.13 & 0 \\ -11865.73 & 0 & 3164195.99 & 11865.73 & 0 & 1582097.99 \\ -59.33 & 0 & 11865.73 & 59.33 & 0 & 11865.73 \\ 0 & -1016.13 & 0 & 0 & 1016.13 & 0 \\ -11865.73 & 0 & 1582097.99 & 0 & 0 & 3164195.99 \end{bmatrix}$$

$$k_{G8} = k_{G9} = k_{G10} = \begin{bmatrix} 104.89 & 0 & -15733.48 & -104.89 & 0 & -15733.48 \\ 0 & 1250.97 & 0 & 0 & -1250.97 & 0 \\ -15733.48 & 0 & 3146695.99 & 15733.48 & 0 & 1573347.99 \\ -104.89 & 0 & 15733.48 & 104.89 & 0 & 15733.48 \\ 0 & -1250.97 & 0 & 0 & 1250.97 & 0 \\ -15733.48 & 0 & 1573347.99 & 15733.48 & 0 & 3146695.99 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez calculada para las rótulas plásticas en las vigas fue la siguiente:

$$k_{GR1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 899322.07 & 0 & 0 & -899322.07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -899322.07 & 0 & 0 & 899322.07 \end{bmatrix}$$

$$k_{GR1} = k_{GR2} = k_{GR3} = k_{GR4} = k_{GR12} = k_{GR14} = k_{GR16} = k_{GR18}$$

La matriz de rigidez calculada para las rótulas plásticas en las columnas del primer piso fue la siguiente:

$$k_{GR5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3498638.16 & 0 & 0 & -3498638.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3498638.16 & 0 & 0 & 3498638.16 \end{bmatrix}$$

$$k_{GR5} = k_{GR6} = k_{GR7} = k_{GR20} = k_{GR22} = k_{GR24}$$

La matriz de rigidez calculada para las rótulas plásticas en las columnas del segundo piso fue la siguiente:

$$k_{GR8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2913619.98 & 0 & 0 & -2913619.98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2913619.98 & 0 & 0 & 2913619.98 \end{bmatrix}$$

$$k_{GR8} = k_{GR9} = k_{GR10} = k_{GR26} = k_{GR28} = k_{GR30}$$

Matrices de Rigidez General (K): Similar al ejemplo P1 de pórticos se realizó la combinación de matrices, con lo cual se obtuvo la matriz de rigidez general de la estructura. En este caso, la estructura tuvo 29 nodos lo que involucró 87 GDL, pero se aplicó las restricciones para unir los resortes rotacionales y se eliminó la deformación axial de todos los elementos (mediante la matriz equalDOF), por lo tanto, los GDL se redujo a 37. Este proceso puede visualizarse en el programa al ejecutar el Ejemplo P2.

Partición de la Matriz: Se determinó los GDLs y GDLp de la siguiente manera:

$$GDLs = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9\}$$

$$GDLp = \begin{Bmatrix} 10 & 12 & 15 & 18 & 19 & 21 & 24 & 27 & 30 & 33 & 36 & 39 & 42 & 45 \\ 48 & 51 & 54 & 57 & 60 & 63 & 66 & 69 & 72 & 75 & 78 & 81 & 84 & 87 \end{Bmatrix}$$

Posteriormente se realizó la partición

$$\begin{Bmatrix} \{F_p\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{ps}] \\ [K_{sp}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_p\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix}$$

y se obtuvo las siguientes matrices K_{pp} , K_{ps} , K_{sp} y K_{ss} .

Carga Unitaria por Eventos (proceso iterativo): Se calculó los desplazamientos por medio de la Ecuación 11, teniendo en cuenta que el vector F_p es nulo excepto en el GDL en dirección x correspondiente al nodo N°7.

$$\{u_p\} = [K_{pp}]^{-1} \times (\{F_p\} - [K_{ps}]\{u_s\})$$

Posteriormente, se calculó las fuerzas elementales por medio de las relaciones *Fuerza-Desplazamiento* elementales, con las cuales se determinó la fuerza que hace fluir a cada elemento.

Finalmente, se encontró la fuerza mínima de fluencia entre todos los elementos y nuevamente se calculó los desplazamientos generados por esta fuerza de fluencia, con lo cual se generó el punto de la Curva Pushover.

El proceso se volvió a realizar con la sustitución de la rigidez de la rótula plástica que fluyó por la rigidez indicada en el comportamiento plástico y con la consideración de la carga aplicada de las anteriores iteraciones que causó la fluencia de alguna rótula plástica.

4.2.2.5. Resultados

Para la validación del programa UCAS2D se utilizó el programa OpenSees. Cabe indicar que OpenSees utiliza incrementos de desplazamientos para la obtención de la Curva Pushover, mientras más pequeño sea este incremento, la curva es más precisa. Por otra parte, UCAS2D busca la fuerza de fluencia necesaria para que surja una rotula plástica. Por lo tanto, los resultados fueron comparados únicamente con los valores que brinda UCAS2D. Luego, al ejecutar el análisis planteado en ambos programas se obtuvieron los siguientes resultados:

- **Curva Pushover**

Tabla 33: Datos Pushover Ejemplo P2 (UCAS2D).

UCAS2D			OpenSees	
Iteración	Desplazamiento (cm)	Carga (Tonf)	Desplazamiento (cm)	Carga (Tonf)
0	0	0	0	0
1	9.0976	113.340	9.0976	113.341
2	9.1396	113.770	9.1396	113.770
3	9.1396	113.770	9.1396	113.770
4	9.6334	117.563	9.6334	117.563
5	10.2256	121.505	10.2256	121.505
6	10.2256	121.505	10.2256	121.505
7	10.8596	124.855	10.8596	124.855
8	11.2277	126.361	11.2277	126.361
9	11.2277	126.361	11.2277	126.361

Los puntos de la curva Pushover generadas por UCAS2D y OpenSees son mostrados en la Tabla 33, se observó que los valores numéricos son similares, sin embargo, en algunos casos existe una pequeña variación debida al redondeo de los números.

En la Figura 65, se presenta la curva generada por el programa UCAS2D. Como se indicó anteriormente, el análisis no-lineal se realiza hasta que el determinante de la matriz de rigidez de la estructura no se aproxime a cero, dado que para este caso se requiere otros métodos que no tengan problema al trabajar con matrices singulares.

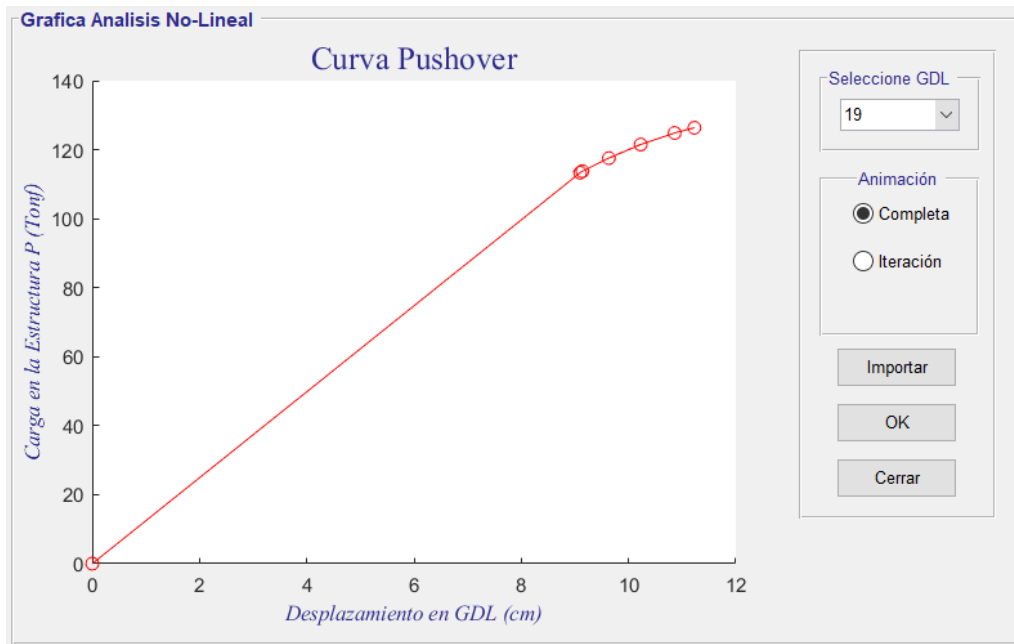


Figura 65: Curva Pushover Ejemplo P2 (UCAS2D).

Otra manera de confirmar la validez de los resultados fue mediante la superposición de las Curvas Pushover determinadas por los programas, lo cual se puede observar en la Figura 66. La misma que demostró la congruencia entre ambas curvas.

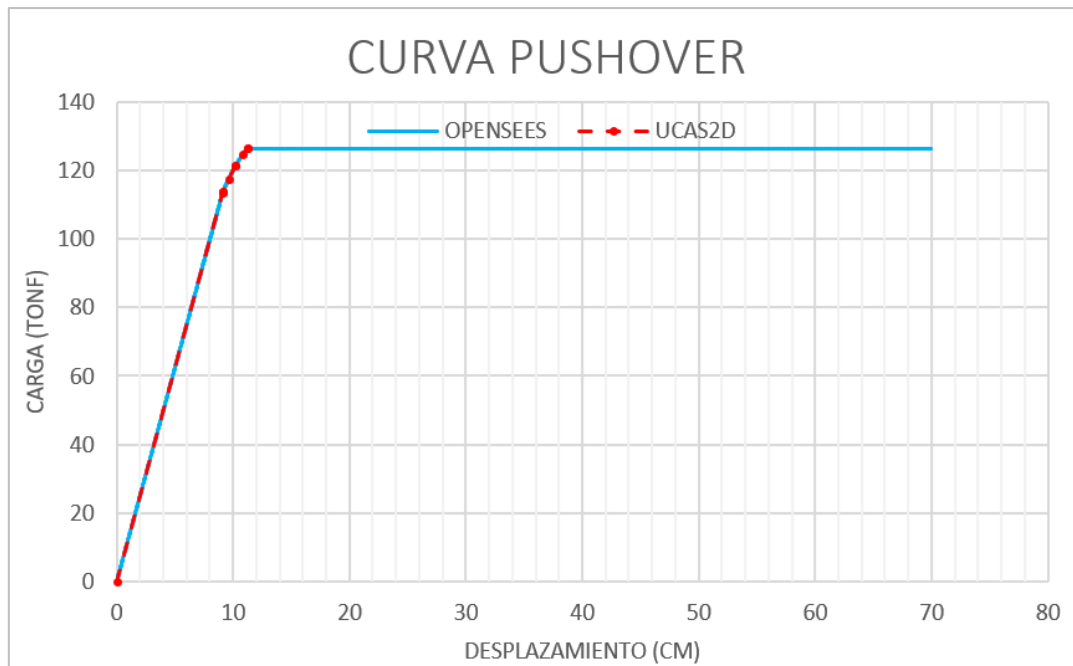


Figura 66: Comparación de los resultados obtenidos con OpenSees y UCAS2D.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente proyecto se desarrolló un programa con interfaz gráfica de usuario totalmente funcional, el mismo que es capaz de realizar análisis lineal y no-lineal de pórticos y armaduras en 2D (UCAS2D).

El desarrollo del proyecto demostró que implementar el método de los desplazamientos en su forma matricial a un código en lenguaje de programación (MATLAB) fue factible y satisfactorio, ya que es un método sistemático y generalizado. En cuanto a realizar modificaciones en el modelo como lo es: material, sección, cargas, o principalmente en estructuras estáticamente indeterminadas, se definió que el método de los desplazamientos es muy versátil. Por lo tanto, se concluye que la eficiencia mencionada en la literatura acerca de la implementación del método de los desplazamientos en ordenador es verídica.

Los resultados del análisis lineal generados por UCAS2D fueron validados en el programa comercial SAP 2000. Se pudo observar que los resultados (desplazamientos en los nodos, reacciones en apoyos y fuerzas elementales) de los dos programas son iguales. En cuanto a las gráficas de esfuerzos y deformación UCAS2D y SAP2000 presentan datos numéricos y diagramas similares, pero difieren en la dirección de los diagramas para guardar concordancia entre los diagramas generales y elementales. Con lo cual se garantiza que el análisis lineal realizado por UCAS2D es correcto, esto se pudo observar en la sección 4.1.1 y 4.2.1.

Los resultados de un análisis no-lineal generados por UCAS2D fueron validados en el programa OpenSees. Se pudo observar que los resultados (desplazamientos en el nodo de control, fuerzas de fluencia) de los dos programas fueron iguales, además, las gráficas Pushover presentaron congruencia. Los dos programas utilizan diferentes metodologías, UCAS2D utiliza análisis por eventos, mientras que, OpenSees utiliza análisis por pasos, demostrando que el análisis no-lineal por eventos da resultados exactos y su obtención es eficiente mientras la matriz de rigidez no se aproxime a su singularidad (rama ascendente). Con lo cual se garantiza que el análisis no-lineal realizado por UCAS2D es correcto, esto se pudo observar en la sección 4.1.2 y 4.2.2.

La programación fue realizada en MATLAB como uno de los propósitos inicialmente planteados, sin embargo, el código desarrollado es muy probable que pueda ser completamente compatible en otro lenguaje de programación libre, como por ejemplo GNU Octave. Por lo cual, UCAS2D se le considera de código abierto, de esta manera se pone a disposición de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Cuenca, la cual analizará el permiso a los usuarios para que puedan utilizar, modificar y redistribuir el programa, ya sea para fines educativos o investigativos. El programa entrega el proceso de resolución por medio de tablas y memoria de cálculo las mismas que contienen, información de: nodos, conectividad, materiales y secciones empleadas, *GDLs*, *GDLp*, matrices de rigideces elementales en diferentes sistemas de coordenadas, matriz de rigidez general, partición de la matriz general, fuerzas elementales en diferentes tipos de coordenadas, desplazamientos nodales, reacciones en apoyos, y gráficas de fuerzas internas y deformada de elementos.

Generalmente los programas más usados en la región (Latinoamérica) para el cálculo estructural son SAP2000 y ETABS, puesto que presentan una interfaz intuitiva y amigable. La interfaz gráfica simplifica y facilita la modelación de estructuras y permite modificaciones de forma eficaz. Por lo cual, para el manejo del programa UCAS2D presenta un interfaz muy similar a SAP2000, esto fue con el propósito de que los usuarios de esta herramienta se familiaricen rápidamente con ella. Sin embargo, se desarrolló un manual de usuario, dado que se planteó como uno de los objetivos al inicio del proyecto. Se debe tener en cuenta que el manual de usuario no contiene los principios del método de los desplazamientos.

La velocidad de resolución de los modelos en UCAS2D depende de: número de nodos, número de elementos y especialmente de la complejidad de cargas en los elementos. Los modelos ejecutados al desarrollar UCAS2D demostraron que la aplicación del método de los desplazamientos es relativamente



rápida. Sin embargo, al generar las ecuaciones para los diagramas de fuerzas internas y la deformación de la estructura, demostró que el tiempo de procesamiento es relativamente mayor al compararlos con programas comerciales.

Al ser el método de los desplazamientos un método sistemático, permite que UCAS2D se pueda desarrollarse cada vez más. La finalidad de este proyecto es ser la base de posteriores versiones para desarrollar un programa completo y propio de la Universidad de Cuenca. Se solicita el apoyo a las autoridades de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Cuenca para promover el desarrollo de UCAS2D, incorporando diferentes tipos de análisis y modificaciones como: análisis estructural en 3D, análisis elemento tipo arco, análisis sísmico por medio del análisis dinámico, agregar el Código NEC, diseño estructural.

Se recomienda que antes de modelar las diferentes estructuras se revise el manual de usuario y los videos tutoriales, ya que al desconocer el programa o no poseer las bases del análisis estructural, lo más probable es que el ingreso de datos sea incorrecto y se obtenga resultados erróneos. Finalmente, también se sugiere que para el correcto funcionamiento del programa se debe usar la versión de MATLAB R2017b o similares. O en su debido caso, se propone que se realicen las actualizaciones pertinentes en el código al utilizar nuevas versiones de MATLAB, puesto que quizás algún comando utilizado en el programa se haya modificado en las futuras versiones.



6. BIBLIOGRAFÍA

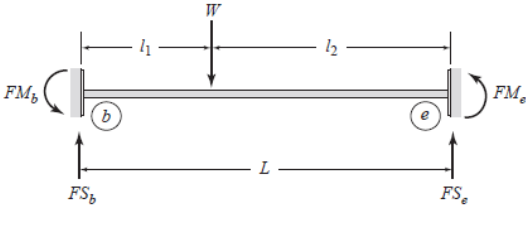
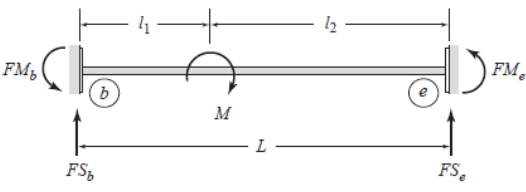
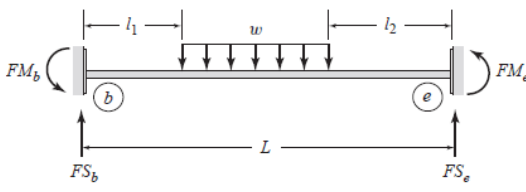
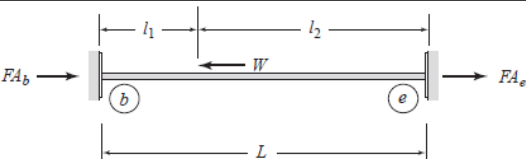
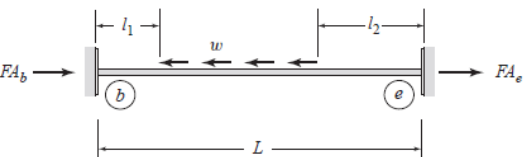
- Aguiar, R. (2004). *Análisis Matricial de Estructuras* (3a ed.).
- Barrera, D. V. (2018). *Modelación elasto-plástica y análisis no lineal de una estructura especial de acero utilizando OpenSees*. Universidad de Cuenca.
- Berkeley. (2006). *OpenSees*. <https://opensees.berkeley.edu/OpenSees/developer/index.php>
- Berkeley. (2016). *Open System For Earthquake Engineering Simulation* (Versión 2.5.0) [Computer software]. University of California.
- Blanco, E., Cervera, M., & Suárez, B. (2015). *Análisis Matricial de Estructuras*. Cimne.
- Blanco, J., González, A., & García, J. (2012). *Análisis Estático de Estructuras por el Método Matricial*. Manuales.
- Camacho, J., & Romero, M. (2012). *ANÁLISIS ESTRUCTURAL CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ASISTIDO POR COMPUTADORA*. UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR.
- Cervera, M., & Blanco, E. (2001). *Mecánica de Estructuras* (Segunda, Vol. 1). UPC.
- Computers and Structures, Inc. (2017). *SAP2000 Structural Analysis Program*. Computers and Structures, Inc.
- Computers and Structures, Inc. (2018). *ETABS Integrated Building Design Software*. Computers and Structures, Inc.
- Flores, F. (2018). *Apuntes de la Materia "Análisis Matricial de Estructura"* [Apuntes].
- Hibbeler, R. (2011). *Mecánica de Materiales* (Octava). Pearson.
- Hibbeler, R. (2012). *ANÁLISIS ESTRUCTURAL* (Octava). Pearson.
- Hurtado, J. E. (2012). *Análisis matricial de estructuras*.
- Jurado, A. (2016). *COMPARACIÓN ENTRE LA NORMA ECUATORIANA DE LA CONSTRUCCIÓN 2011 Y LA NORMA ECUATORIANA DE LA CONSTRUCCIÓN 2015 APLICADAS AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL EDIFICIO "MANUELA SÁENZ" MEDIANTE EL USO DEL PROGRAMA CYPECAD*. UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO.
- Karnovsky, I., & Lebed, O. (2010). *Advanced Methods of Structural Analysis*. Springer.
- Kassimali, A. (2012). *Matrix Analysis of Structures* (Segunda). Cengage.
- Kassimali, A. (2015). *Análisis Estructural* (Quinta). Cengage.
- Luévanos, A. (2011). *Método de deflexión-pendiente para vigas estáticamente indeterminadas, considerando las deformaciones por cortante*.
- Luthe, R. (1971). *Análisis Estructural*. Alfaomega.



- Mazzoni, S., McKenna, F., Scott, M. H., & Fenves, G. L. (2006). *OpenSees Command Language Manual*.
- McCormac, J. C. (2007). *Structural Analysis* (4a ed.). John Wiley and Sons, Inc.
- McCormac, J., & Nelson, J. (2006). *Análisis de Estructuras (Metodos Clásico y Matricial)* (Tercera). Alfaomega.
- McGuire, W., Gallagher, R., & Ziemian, R. (2014). *Matrix Structural Analysis* (Segunda).
- Nagarajan, P. (2019). *Matrix Methods of Structural Analysis*. CRC Press.
- Navaee, S., & Das, N. K. (2002). *Utilization of MATLAB in Structural Analysis*. American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition.
- Rojas, R. M., & Padilla, H. M. (2009). *ANALISIS ESTRUCTURAL CON MATRICES* (1a ed.). TRILLAS.
- Sáez, M. (2014). *Comparativo entre análisis elástico lineal y análisis plástico de un pórtico rígido plano*. Univesidad de Zaragoza.
- Sennett, R. E. (1994). *Matrix Analysis of Structures*. Waveland Press, Inc.
- Singer, F., & Pytel, A. (1994). *Resistencia de Materiales* (Cuarta). Alfaomega, Oxford.
- Tena, A. (2007). *Análisis de estructuras con métodos matriciales*. Limusa.
- Uribe, J. (2000). *ANALISIS DE ESTRUCTURAS* (2a ed.). ECOE.
- Vera, A. (2016). *Análisis Estructural con Matrices*. MACRO.
- Vilema, C. (2014). *ANÁLISIS DEL FACTOR DE REDUCCIÓN DE LAS FUERZAS SÍSMICA (R) EN UN EDIFICIO DE HORMIGON ARMADO DE 5 PISOS CON CYPECAD PARA GARANTIZAR EL CÁLCULO Y SEGURIDAD DE SUS HABITANTES UBICADO EN EL BARRIO EL DORADO, CIUDAD DE PUYO, PROVINCIA DE PASTAZA*. UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO.

7. ANEXOS

7.1. Anexo 1: Tablas de Empotramiento Perfecto (Kassimali, 2012)

Configuración de Carga	Fuerzas de Empotramiento
	$FS_b = \frac{Wl_2^2}{L^3}(3l_1 + l_2)$ $FM_b = \frac{Wl_1l_2^2}{L^2}$ $FS_e = \frac{Wl_1^2}{L^3}(l_1 + 3l_2)$ $FM_e = -\frac{Wl_1^2l_2}{L^2}$
	$FS_b = -\frac{6Ml_1l_2}{L^3}$ $FM_b = \frac{Ml_2}{L^2}(l_2 - 2l_1)$ $FS_e = \frac{6Ml_1l_2}{L^3}$ $FM_e = \frac{Ml_1}{L^2}(l_1 - 2l_2)$
	$FS_b = \frac{wL}{2} \left[1 - \frac{l_1}{L^4}(2L^3 - 2l_1^2L + l_1^3) - \frac{l_2^3}{L^4}(2L - l_2) \right]$ $FM_b = \frac{wL^2}{12} \left[1 - \frac{l_1^2}{L^4}(6L^2 - 8l_1L + 3l_1^2) - \frac{l_2^3}{L^4}(4L - 3l_2) \right]$ $FS_e = \frac{wL}{2} \left[1 - \frac{l_1^3}{L^4}(2L - l_1) - \frac{l_2}{L^4}(2L^3 - 2l_2^2L + l_2^3) \right]$ $FM_e = -\frac{wL^2}{12} \left[1 - \frac{l_1^3}{L^4}(4L - 3l_1) - \frac{l_2^2}{L^4}(6L^2 - 8l_2L + 3l_2^2) \right]$
	$FA_b = \frac{Wl_2}{L}$ $FA_e = \frac{Wl_1}{L}$
	$FA_b = \frac{w}{2L}(L - l_1 - l_2)(L - l_1 + l_2)$ $FA_e = \frac{w}{2L}(L - l_1 - l_2)(L + l_1 - l_2)$

FM : Fuerza de Empotramiento a Momento

FS : Fuerza de Empotramiento a Corte

FA : Fuerza de Empotramiento a Axial

7.2. Anexo 2: Matriz de Rigidez General Ejemplo A1

[illegible]

7.3. Anexo 3: Matriz de Rigidez General Ejemplo A2

$K =$	1379.88	360.43	0	-1019.45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	-360.43	-360.43	0	0	0	0	0	0	0	0	
	360.43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-360.43	-360.43	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	-1019.45	0	0	2399.33	360.43	0	-1019.45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-360.43	-360.43	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	360.43	1379.88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1019.45	0	-360.43	-360.43	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	-1019.45	0	0	2038.90	0	0	-1019.45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	1019.45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	-1019.45	0	0	2399.33	-360.43	0	-1019.45	0	0	0	0	0	-360.43	-360.43	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	-360.43	1379.88	0	0	0	0	0	0	0	0	360.43	360.43	0	0	0	0	-1019.45	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	-1019.45	0	0	1379.88	-360.43	0	0	0	0	0	0	0	0	-360.43	360.43	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-360.43	360.43	0	0	0	0	0	0	0	0	360.43	-360.43	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	-360.43	-360.43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1379.88	360.43	0	-1019.45	-1019.45	0	0	0	0	0	0	
	-360.43	-360.43	0	-1019.45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	360.43	1379.88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	-360.43	-360.43	0	0	0	0	-360.43	360.43	0	0	0	0	-1019.45	0	0	2759.76	2759.76	0	-1019.45	0	0	0	0	
	0	0	0	-360.43	-360.43	0	0	-1019.45	360.43	-360.43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-360.43	360.43	0	0	0	0	-1019.45	-1019.45	1379.88	-360.43	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1019.45	360.43	-360.43	0	0	0	0	0	0	0	-360.43	1379.88	0	0	0		

7.4. Anexo 4: Matriz de Rigidez General Ejemplo P1

$$K = \begin{bmatrix} 257.46 & 77.80 & -15279.87 & 0 & 0 & 0 & -101.84 & 0 & -15275.73 & -155.62 & -77.80 & -4.15 \\ 77.80 & 1253.50 & 8.30 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1214.57 & 0 & -77.80 & -38.93 & 8.30 \\ -15279.87 & 8.30 & 3059293.41 & 0 & 0 & 0 & 15275.72 & 0 & 1527572.49 & 4.15 & -8.30 & 2073.53 \\ 0 & 0 & 0 & 101.84 & 0 & -15275.72 & 0 & 0 & 0 & -101.84 & 0 & -15275.72 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1214.57 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1214.57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15275.72 & 0 & 3055144.98 & 0 & 0 & 0 & 15275.72 & 0 & 1527572.49 \\ -101.84 & 0 & 15275.72 & 0 & 0 & 0 & 327.65 & 0 & 15275.72 & -225.81 & 0 & 0 \\ 0 & -1214.57 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1215.17 & 0 & 0 & -0.60 & 360.68 \\ -15275.73 & 0 & 1527572.49 & 0 & 0 & 0 & 15275.72 & 0 & 3055144.98 & 0 & 0 & 0 \\ -155.62 & -77.80 & 4.15 & -101.84 & 0 & 15275.72 & -225.81 & 0 & 0 & 483.28 & 77.80 & 15279.87 \\ -77.80 & -38.93 & -8.30 & 0 & -1214.57 & 0 & 0 & -0.60 & 0 & 77.80 & 1254.10 & -368.98 \\ -4.15 & 8.30 & 2073.53 & -15275.72 & 0 & 1527572.49 & 0 & 360.68 & 0 & 15279.87 & -368.98 & 3275702.46 \end{bmatrix}$$

7.5. Anexo 5: Programa y Manual de Usuario

El programa desarrollado UCAS2D y su respectivo Manual de Usuario se encuentran en el siguiente enlace:

<https://drive.google.com/drive/folders/1SFQl0aT4IOas96VLK-3PAorsbdj33Dx4?usp=sharing>

Nota 1: Para iniciar el programa ejecutar el archivo UCAS2D.m.

Nota 2: Para visualizar los videos tutoriales reemplazar la carpeta Videos del enlace dentro de la carpeta UCAS2D.